Математические методы исследования

Теория измерений стала неотъемлемой частью математических методов исследования. В статье Б. В. Барского и М. В. Соколова дается обзор полученных за последние годы научных результатов, связанных с выбором методов усреднения статистических данных в соответствии с требованиями теории измерений. Статья А. И. Орлова посвящена основным идеям теории измерений — введению шкал и требованию инвариантности статистических выводов относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения.

УДК 519.28

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

© Б. В. Барский[1], М. В. Соколов[2]

Статья поступила 31 августа 2004 г.

Систематизированы результаты, посвященные характеризации функционального вида средних, сравнение которых инвариантно относительно допустимых преобразований шкалы измерения. Приведены инвариантные средние для большинства наиболее часто используемых классов — средних по Коши, линейно-однородных средних, средних по Колмогорову и других. Указана связь рассматриваемых задач с “принципом создания научной теории” Р. Д. Льюса, понятием “содержательности” высказывания и с характеризацией индикатора отношения предпочтения на множестве вероятностных распределений.

Различные виды средних (арифметическое, геометрическое, гармоническое, медиана, мода) широко используются во многих областях прикладной науки (теории планирования и обработки результатов эксперимента, многокритериальном оценивании, методах анализа экспертных оценок, экономической и математической статистике, теории экономических индексов, социологии и др.). Однако богатство функциональных форм [1 – 3] и отсутствие единого общепринятого определения понятия “среднего значения” [2 – 6] зачастую ведут к произволу в использовании тех или иных видов средних. Сложившуюся ситуацию, на наш взгляд, способна упорядочить современная теория измерений [7 – 12], призывающая отказаться от использования тех алгоритмов анализа данных, выводы которых оказываются неустойчивыми к смене единиц измерения фигурирующих в них переменных. В данной статье систематизированы некоторые результаты, касающиеся характеризации различных видов средних, удовлетворяющих данному требованию.

Для их формулировки потребуется несколько определений, связанных с понятием шкалы измерения и ее допустимых преобразований [13, с. 188 – 189]. Пусть E, N — соответственно эмпирическая и числовая системы с отношениями. Кортеж $S = \langle E, N, h\rangle$, где h — гомоморфизм из E в N, называют шкалой измерения. Совокупность $H = \{h\}$ всех гомоморфизмов из E в N описывает класс эквивалентных шкал, называемый типом шкалы измерения. В большинстве практически важных случаев $H = \{t \circ h_0,\ t \in T\}$, где h_0 — произвольный фиксированный элемент H, а множество T вместе с операцией композиции (обозначена “$\circ$”) образует группу допустимых преобразований шкалы, полностью характеризующую соответствующий тип шкалы измерения. Так, группа преобразований подобия $T_R = \{t{:}t(x) = ax,\ a > 0\}$ определяет шкалу отношений, группа $T_O = \{t{:}t(x)$ — строго монотонно возрастающая функция$\}$ — ординальную (поряд-

[1] ЗАО “Управление строительными проектами”, Санкт-Петербург, Россия.

[2] ЗАО “Инвестиционная компания АВК”, Санкт-Петербург, Россия.

ковую) шкалу и т. д. (см. таблицу). Тип шкалы S_1 называют "более строгим" ("сильным", "информативным"), чем тип шкалы S_2, если для соответствующих групп допустимых преобразований справедливо включение $T_1 \subset T_2$ [14] (более общий подход к сравнению шкал предложен в работе [15]). В этом смысле, например, шкалы отношений и разностей "информативнее" шкалы интервалов.

В известной работе Р. Д. Льюса [16] показано, что предположения относительно типов шкал, в которых измеряются те или иные переменные, существенно сужают возможный вид связывающих их функциональных зависимостей. Формализацией данного наблюдения послужил так называемый "принцип создания научной теории" [17 – 20], согласно которому любой "закон", связывающий некоторые размерные переменные y, x_1, …, x_n посредством функциональной зависимости $y = F(x_1, …, x_n)$, должен обладать тем свойством, что всякое допустимое преобразование $t_i(x_i) \in T_i$ шкалы S_i, по которой измеряется величина x_i, $i = 1, …, n$, должно приводить к допустимому преобразованию $\overline{t}(y) \in \overline{T}$ шкалы $\overline{S}$, по которой измеряется величина y:

$$F\left(t_1(x_1), ..., t_n(x_n)\right) = \overline{t}(y) = \overline{t}\left(F(x_1, ..., x_n)\right). \quad (1)$$

Иными словами, изменение масштабов измерения независимых переменных $x_1, …, x_n$ не должно менять функционального вида F "закона", вызывая лишь переход к другой шкале измерения зависимой переменной y в рамках данного типа шкалы $\overline{S}$. В этом смысле "принцип создания научной теории" Льюса является обобщением метода анализа размерностей [21] на случай произвольных шкал измерения переменных y, x_1, …, x_n.

"Принцип" Льюса (1) тесно связан с понятием "содержательности" высказывания [22 – 24], неформальное определение которого может быть следующим [12, с. 59]: высказывание относительно некоторых переменных называют "содержательным", если его справедливость не зависит от выбора допустимых преобразований шкал, в которых измеряются фигурирующие в нем переменные.

Отметим, что в соответствии с определением понятие "содержательности" не связано с истинностью лежащего в его основе утверждения. Например, высказывание "муравей тяжелее слона" неверно при любом выборе единицы измерения массы материального тела (и, более того, значения ускорения свободного падения), однако в соответствии с данным определением оно "содержательно". Свою актуальность требование "содержательности" приобретает в связи с тем, что выбор той или иной шкалы измерения переменных сопряжен с известной долей субъективизма, и у исследователя появляется возможность манипулировать результатами анализа, если его выводы оказываются неустойчивыми по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

Как установлено в работах [14; 25, с. 103 – 104], "содержательность" определенных высказываний эквивалентна знанию типа шкалы измерения рассматриваемых объектов. Например, "содержательность" высказывания $h(e_1) > h(e_2)$ для любых e_1, $e_2 \in E$ эквивалентна тому, что эмпирические объекты E измеряются в порядковой шкале (или "более строгой") и т. д. (см. таблицу). Данное

Связь между основными шкалами измерений и "содержательностью" определенных высказываний [14; 25, с. 103 – 104]

Тип шкалы	Множество значений шкалы (X)	Группа допустимых преобразований	"Содержательность" высказывания
Абсолютная, S_A	Произвольно	$T_A = \{t(x) = x\}$	$h(e) = a$ для любых $a \in \mathbf{R}$ и $e \in E$
Отношений, S_R	$\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}_- \cup \{0\}$, $\mathbf{R}$	$T_R = \{t{:}t(x) = ax,\ a > 0\}$	$h(e_1) = ah(e_2)$ для любых $a \in \mathbf{R}_+$ и $e_1, e_2 \in E$ $(h(e) > 0,\ e \in E)$
Логарифмических отношений, S_{LR}	$(1, \infty)$, $[1, \infty)$, $(0, 1)$, $(0, 1]$, $\mathbf{R}_+$	$T_{LR} = \{t{:}t(x) = x^a,\ a > 0\}$	$\ln h(e_1) = a\ln h(e_2)$ и $h(e_1) > h(e_2)$ для любых $a \in \mathbf{R}_+$ и $e_1, e_2 \in E$ $(h(e) > 0,\ e \in E)$
Разностей, S_D	$\mathbf{R}$	$T_D = \{t{:}t(x) = x + b\}$	$h(e_1) - h(e_2) = b$ для любых $b \in \mathbf{R}$ и $e_1, e_2 \in E$
Интервалов, S_I	$\mathbf{R}$	$T_I = \{t{:}t(x) = ax + b,\ a > 0\}$	$h(e_1) - h(e_2) = a[h(e_3) - h(e_4)]$ и $h(e_1) > h(e_2)$ для любых $a \in \mathbf{R}_+$ и $e_1, e_2, e_3, e_4 \in E$
Логарифмических интервалов, S_{LI}	$\mathbf{R}_+$	$T_{LI} = \{t{:}t(x) = bx^a,\ a > 0,\ b > 0\}$	$\ln h(e_1) - \ln h(e_2) = a[\ln h(e_3) - \ln h(e_4)]$ и $h(e_1) > h(e_2)$ для любых $a \in \mathbf{R}_+$ и $e_1, e_2, e_3, e_4 \in E$ $(h(e) > 0,\ e \in E)$
Порядка (ординальная), S_O	$\mathbf{R}$	$T_O = \{t{:}t(x)$ — строго монотонно возрастающая функция$\}$	$h(e_1) > h(e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in E$
Наименований (номинальная), S_N	$\mathbf{R}$	$T_N = \{t{:}t(x)$ — взаимнооднозначная функция$\}$	$h(e_1) = h(e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in E$

Примечание. Здесь и далее $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}$ — множества положительных, отрицательных и всех действительных чисел соответственно.

соответствие позволяет свести предположения о “содержательности” определенных высказываний (см. четвертый столбец таблицы) к функциональным уравнениям вида (1), методы решения которых в настоящее время достаточно разработаны [5, 17, 18, 20].

Далее приведенные выше принципы и взаимосвязи (см. таблицу) использованы для характеризации средних, результат сравнения которых инвариантен относительно допустимых преобразований шкалы.

Инвариантные средние. Основное функциональное уравнение

Средним значением величин $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ назовем строго монотонно возрастающую функцию

$M : X^n \to \bar{X}$, где $X \left(X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} \right)$, $\bar{X}$ — связные подмножества **R**.

Предположим, что усредняемые величины $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ измеряются по некоторой единой шкале S, задаваемой группой допустимых преобразований $T \subseteq T_O$. В этом случае $T(X) \subseteq X$, а поскольку группа T обязательно содержит единичный элемент — тождественное преобразование, то

$$T(X) = X \quad (2)$$

(здесь и далее все операции над векторами и множествами производятся поэлементно, например, $T(X) = \bigcup_{t \in T,\ x \in X} t(x)$; $t(\mathbf{x}) = (t(x_1), \ldots, t(x_n))$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$).

Требование (2) существенно ограничивает возможную структуру множества X. Второй столбец таблицы содержит все возможные нетривиальные (непустые и неодноточечные) связные решения данного уравнения. В дальнейшем, говоря о среднем значении чисел, измеряемых по какой-либо из приведенных в таблице шкал, под X будем понимать одно из соответствующих множеств.

Среднее $M : X^n \to \bar{X}$ называется инвариантным относительно группы допустимых преобразований $T (T \subseteq T_O)$ шкалы измерения S (или просто T-инвариантным) [25 – 27], если соотношение

$$M(\mathbf{x}) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \right\} M(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X^n \text{ влечет}$$

$$M(t(\mathbf{x})) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \right\} M(t(\mathbf{x}')) \quad (3)$$

для любых $t \in T$.

Иными словами, среднее M T-инвариантно, если высказывание $M(\mathbf{x}) \geq M(\mathbf{x}')$ T-“содержательно” для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X^n$, измеряемых по единой шкале S. В соответствии с таблицей это означает, что M измеряется, по крайней мере, в порядковой шкале S_O. Отличные от (3) постановки задачи построения инвариантных средних предложены в работах [5, 28, 29].

Рассмотрим произвольное T-инвариантное среднее M и обозначим

$$M_I(\mathbf{x}) = m^{-1}(M(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \quad (4)$$

где $m(x) = M(x, \ldots, x)$, $x \in X$. Введенная таким образом функция $M_I(\mathbf{x})$ также строго монотонно возрастает по аргументам $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, инвариантна относительно допустимых преобразований T шкалы S и удовлетворяет требованию идемпотентности:

$$M_I(x, \ldots, x) = x \text{ для любого } x \in X. \quad (5)$$

Как известно [30, с. 43 – 44; 31], при условии монотонности идемпотентность эквивалентна выполнению двойного неравенства

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq M_I(\mathbf{x}) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

$$\text{для всех } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \quad (6)$$

откуда в силу связности X

$$M_I(\mathbf{x}) \in X. \quad (7)$$

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} \in X^n$ и обозначим $x = M_I(x, \ldots, x) = M_I(\mathbf{x}) \in X$, тогда для любого допустимого преобразования $t \in T$ шкалы S получим

$$M_I(t(\mathbf{x})) = M_I(t(x), \ldots, t(x)) = t(x) = t(M_I(\mathbf{x})), \quad (8)$$

где первое равенство обеспечивается инвариантностью, а второе — идемпотентностью функции M_I.

Таким образом, для всякого допустимого преобразования $t \in T$ шкалы S найдется такое строго монотонно возрастающее преобразование $\bar{t}$, что справедлив аналог функционального уравнения Льюса (1):

$$M(t(\mathbf{x})) = \bar{t}(M(\mathbf{x}))$$

$$\text{для всех } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \quad (9)$$

где функции t и $\bar{t}$ сопряжены [22]: $\bar{t} = m \circ t \circ m^{-1}$, $t = m^{-1} \circ \bar{t} \circ m$.

Полученные функциональные уравнения (8), (9) позволяют ограничиться изучением инвариантных идемпотентных функций $M_I(\mathbf{x})$. Произвольные инвариантные функции $M(\mathbf{x})$ могут быть получены из соответствующих идемпотентных посредством преобразования $M(\mathbf{x}) = m(M_I(\mathbf{x}))$, где $m{:}X \to \mathbf{R}$ — произвольная строго монотонно возрастающая функция.

Инвариантные идемпотентные средние

Идемпотентным назовем среднее M_I, удовлетворяющее соотношению (5). В этом случае $\overline{t} = t$ и функциональное уравнение (9) принимает вид (8). В свою очередь, из уравнения (8) следует, что инвариантное идемпотентное среднее M_I измеряется по той же шкале S, что и усредняемые величины $x_1, \ldots, x_n$. Анализ функционального уравнения (8) в общем случае затруднителен, однако для большинства частных случаев, соответствующих наиболее используемым шкалам измерения, его общие решения известны [3, 5]. Например, для средних, инвариантных в шкале отношений, уравнение (8) сводится к функциональному уравнению для линейно-однородных функций [32, с. 297 – 298], а для средних, инвариантных в шкале разностей, оно характеризует “трансляционное” свойство M_I [3, с. 16] и т. д.

Утверждение 1. Инвариантные идемпотентные средние имеют вид:

в шкале отношений [5] —

$$M_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} D(\mathbf{x}) f\left(\mathbf{x}/D(\mathbf{x})\right), & \text{если } D(\mathbf{x}) \neq 0, \\ 0, & x_1 = \ldots = x_n = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

где $D(\mathbf{x}) = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $f:\left\{\mathbf{x} \in X^n : D(\mathbf{x}) = 1\right\} \to X$ — произвольная функция, удовлетворяющая требованию $f(1, \ldots, 1) = 1$, если $\mathbf{R}_+ \subseteq X$, требованию $f(-1, \ldots, -1) = -1$, если $\mathbf{R}_- \subseteq X$, и обеспечивающая строгое монотонное возрастание $M_I(\mathbf{x})$;

в шкале логарифмических отношений (результат следует из предыдущего пункта) —

$$M_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left\{D(\ln\mathbf{x})\, f\left(\ln\mathbf{x}/D(\ln\mathbf{x})\right)\right\}, \\ \qquad\qquad \text{если } D(\ln\mathbf{x}) \neq 0, \\ 1, \qquad\quad \text{если } x_1 = \ldots = x_n = 1, \end{cases} \qquad (11)$$

где $D(\mathbf{x}) = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $f:\left\{\mathbf{x} \in \ln X^n : D(\mathbf{x}) = 1\right\} \to \ln X$ — произвольная функция, удовлетворяющая требованию $f(1, \ldots, 1) = 1$, если $\mathbf{R}_+ \subseteq \ln X$, требованию $f(-1, \ldots, -1) = -1$, если $\mathbf{R}_- \subseteq \ln X$, и обеспечивающая строгое монотонное возрастание $M_I(\mathbf{x})$;

в шкале разностей (результат следует из представления для линейно-однородной функции [32, с. 297 – 298]) —

$$M_I(\mathbf{x}) = x_1 + f\left(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\right), \qquad (12)$$

где $f:\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая требованию $f(0, \ldots, 0) = 0$ и обеспечивающая строгое монотонное возрастание $M_I(\mathbf{x})$;

в шкале интервалов [5] —

$$M_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} D(\mathbf{x}) f\left(\dfrac{\mathbf{x} - A(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})}\right) + A(\mathbf{x}), \\ \qquad\qquad \text{если } D(\mathbf{x}) \neq 0, \\ x, \qquad\quad \text{если } x_1 = \ldots = x_n = x, \end{cases} \qquad (13)$$

где $A(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $D(\mathbf{x}) = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - A(\mathbf{x})\right)^2}$,

$f:\left\{\mathbf{x} \in X^n : A(\mathbf{x}) = 0;\ D(\mathbf{x}) = 1\right\} \to \mathbf{R}$ — произвольная функция, обеспечивающая строгое монотонное возрастание $M_I(\mathbf{x})$;

в шкале логарифмических интервалов (результат следует из предыдущего пункта) —

$$M_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left\{D(\ln\mathbf{x}) f\left(\dfrac{\ln\mathbf{x} - A(\ln\mathbf{x})}{D(\ln\mathbf{x})}\right) + A(\ln\mathbf{x})\right\}, \\ \qquad\qquad \text{если } D(\ln\mathbf{x}) \neq 0, \\ x, \qquad\quad \text{если } x_1 = \ldots = x_n = x, \end{cases} \qquad (14)$$

где $A(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $D(\mathbf{x}) = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - A(\mathbf{x})\right)^2}$,

$f:\left\{\mathbf{x} \in \ln X^n : A(\mathbf{x}) = 0;\ D(\mathbf{x}) = 1\right\} \to \mathbf{R}$ — произвольная функция, обеспечивающая строгое монотонное возрастание $M_I(\mathbf{x})$;

в шкале порядка (существуют лишь при ослаблении условия строгой монотонности M_I до требования неубывания [26]; при условии непрерывности утверждение доказано в работах [25, с. 118 – 119; 33; 34]) —

$$M_I(\mathbf{x}) = \max_{k=\{1,\ldots,r\}} \min_{i \in J_k} x_i, \qquad (15)$$

где $J = \{J_k\}_{k=1}^{r}$ — некоторое непустое семейство непустых подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$; в частности, в классе симметричных идемпотентных средних инвариантными являются лишь члены вариационного ряда [25 – 27, 31]: $M_I(x_1, \ldots, x_n) = x_{(i)}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Линейно-однородные инвариантные средние. Инвариантные средние по Коши и Чизини

Линейно-однородным называется среднее $M_{\text{н}} : X^n \to \bar{X}$, удовлетворяющее тождеству

$$M_{\text{н}}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha \;\; M_{\text{н}}(\mathbf{x}) \text{ при всех } \alpha > 0, \mathbf{x} \in X^n. \qquad (16)$$

В этом случае

$$m(x) = M_{\text{н}}(x,\ldots,x) =$$

$$= \begin{cases} m(1)\,x, & \text{если } x \in X \cap \mathbf{R}_+, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -m(-1)x, & \text{если } x \in X \cap \mathbf{R}_- . \end{cases} \qquad (17)$$

Таким образом, линейно-однородные средние кусочно-пропорциональны (если $m(1) = -m(-1)$, то просто пропорциональны) соответствующим идемпотентным средним, инвариантным в шкале отношений. Например, линейно-однородные средние, инвариантные в шкале разностей, кусочно-пропорциональны идемпотентным средним (13), инвариантным в шкале интервалов, и т. д.

Средним по Коши [6] называется среднее M_C, удовлетворяющее двойному неравенству (6). Как уже упоминалось, при условии монотонности неравенство (6) эквивалентно требованию идемпотентности (5). Таким образом, инвариантные средние по Коши совпадают с соответствующими идемпотентными инвариантными средними.

О. Чизини [4, с. 108] определил среднее M_{Ch} чисел $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ относительно непрерывной функции $F : X^n \to \mathbf{R}$ как решение уравнения

$$F(\mathbf{x}) = F(M_{Ch},\ldots,M_{Ch}). \qquad (18)$$

Если в дополнении к определению (18) потребовать строгую монотонность функции F, то существует единственное решение уравнения (18) $M_{Ch}(\mathbf{x})$, которое строго монотонно возрастает по аргументам $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и удовлетворяет требованию идемпотентности (5). Таким образом, монотонные инвариантные средние по Чизини совпадают с соответствующими идемпотентными инвариантными средними, при этом для порождающей их функции F справедливо

$$F(\mathbf{x}) = m\big(M_I(\mathbf{x})\big), \qquad (19)$$

где $m : X \to \mathbf{R}$ — произвольная строго монотонная функция, а M_I — соответствующее инвариантное идемпотентное среднее.

“Содержательные” индикаторы отношения предпочтения. Инвариантные средние по Колмогорову и их обобщения

Продолжая конкретизировать понятие среднего, рассмотрим проблему нахождения инвариантных средних по Колмогорову [1, 35] и тесно связанную с ней задачу характеризации “содержательных” функций полезности по Нейману — Моргенштерну [36].

Напомним [13, с. 467 – 469], что функционал $U : F \to \mathbf{R}$ называют индикатором бинарного отношения предпочтения, заданного на множестве одномерных вероятностных распределений F, если для любых распределений $f_1, f_2 \in F$:

$$f_1 \text{ предпочтительнее } f_2 \text{ тогда и только тогда, когда } U[f_1] \geq U[f_2]. \qquad (20)$$

При некоторых естественных предположениях относительно свойств отношения предпочтения такие функционалы существуют и среди них найдется такой, который представим в виде [13, с. 467; 36]:

$$U[f] = \mathbf{E}[u(\tilde{x})], \qquad (21)$$

где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания; $\tilde{x}$ — случайная величина, подчиняющаяся вероятностному распределению $f \in F$; u — некоторая непрерывная строго монотонно возрастающая функция (определенная с точностью до строго монотонно возрастающего линейного преобразования), называемая функцией полезности. В качестве множества F в этом случае может фигурировать, например, множество вероятностных распределений с носителем из X, для которых соответствующее математическое ожидание существует.

Случайные величины $\tilde{x} \sim f \in F$, на которых задана система предпочтений (F, u), могут иметь весьма разнообразную природу (интерпретацию) и измеряться в различных шкалах. Типичным примером здесь может служить система предпочтений, заданная на множестве случайных доходов, измеряемых по шкале отношений S_R. Для нее естественно ожидать, что предпочтения относительно любых двух альтернатив инвестирования денежных средств (например, вложить средства в банк под плавающую ставку процента или приобрести на ту же сумму акции с некоторой случайной доходностью) не должны меняться в зависимости от того, располагает ли индивид x рублями или $100x$ копейками.

Руководствуясь сказанным, при экономико-математическом анализе среди всех непрерывных строго монотонно возрастающих функций полезности u в формуле (21) естественно ограничиться лишь теми, которые не меняют систему предпочтений при допустимом преобразовании $t \in T$ ($T \subseteq T_O$) шкалы S измерения случайной величины $\tilde{x}$. Согласно соотношениям (20), (21), это эквивалентно требованию T-“содержательности” высказывания $\mathbf{E}\left[u(\tilde{x}_1)\right] \geq \mathbf{E}\left[u(\tilde{x}_2)\right]$ для любых случайных величин $\tilde{x}_1 \sim f_1, \tilde{x}_2 \sim f_2, f_1, f_2 \in F$. Функции полезности и системы предпочтений, удовлетворяющие данному требованию, естественно называть T-“содержательными”.

Рассуждения, аналогичные (3) – (8), позволяют заключить, что для любого допустимого преобразования $t \in T$ шкалы S найдется такое строго монотонно возрастающее преобразование $\bar{t}$, что для T-“содержательной” функции полезности справедлив аналог функционального уравнения (9):

$$\mathbf{E}\left[u\left(t(\tilde{x})\right)\right] = \bar{t}\left(\mathbf{E}\left[u(\tilde{x})\right]\right) \text{ для любой случайной величины } \tilde{x} \sim f \in F. \quad (22)$$

С преобразованием $\bar{t}$ сопряжем строго монотонно возрастающую функцию $\hat{t} = u^{-1} \circ \bar{t} \circ u$. В новых обозначениях соотношение (22) имеет вид:

$$\hat{t}\left(M_u\left[\tilde{x}\right]\right) = M_u\left[t(\tilde{x})\right], \quad (23)$$

где

$$M_u\left[\tilde{x}\right] = u^{-1}\left(\mathbf{E}\left[u(\tilde{x})\right]\right) — \quad (24)$$

среднее по Колмогорову [1, 35] случайной величины $\tilde{x}$ со строго монотонной непрерывной порождающей функцией $u : X \to \mathbf{R}$.

Идемпотентность среднего (24) влечет равенство $\hat{t} = t$, и в силу строгой монотонности $t(x)$ выражение (23) может быть преобразовано к виду

$$M_u\left[\tilde{x}\right] = M_{u \circ t}\left[\tilde{x}\right] \text{ для любых } t \in T, \tilde{x} \sim f \in F. \quad (25)$$

Таким образом, задача нахождения “содержательных” функций полезности эквивалентна нахождению соответствующих инвариантных средних по Колмогорову.

Как известно [2; 32, с. 217; 35, с. 86 – 88, 194; 37], средние по Колмогорову $M_u\left[\tilde{x}\right]$, $M_{u \circ t}\left[\tilde{x}\right]$ с порождающими функциями u, $u \circ t$ эквивалентны (в смысле равенства (25) для произвольных случайных величин $\tilde{x}$ с носителем из X, для которых соответствующие математические ожидания существуют) тогда и только тогда, когда найдутся такие константы $a_t \neq 0$, b_t, что преобразование t является на множестве X u-аффинным [2]:

$$u(t(x)) = a_t u(x) + b_t, t \in T, x \in X. \quad (26)$$

Поскольку функция полезности определена с точностью до линейного монотонно возрастающего преобразования, т. е. полезность $y = u(x)$ измеряется по шкале интервалов, то уравнение (26) может интерпретироваться как одномерный аналог функционального уравнения Льюса (1) относительно “закона” u, связывающего переменные y, x, измеряемые в шкалах S_I и S соответственно.

При $a_t = 1$ уравнение (26) представляет собой функциональное уравнение Абеля, а при $a_t \neq 1$ (посредством замены $\bar{u}(x) = u(x) + b_t/(a_t - 1)$) оно сводится к функциональному уравнению Шредера. Известно множество результатов относительно существования и единственности решений данных функциональных уравнений (см., например, [38]). Приведем здесь один из них, касающийся важного с теоретико-экономической точки зрения случая вогнутых решений.

Утверждение 2 [38, с. 143].

Пусть в интервале $X = (0, d)$, $d > 0$, функция $t(x)$ вогнута или выпукла, строго монотонно возрастает и удовлетворяет неравенству $0 < t(x) < x$. Тогда, если $t(0) = 0$, $t'(0) = a_T$, $0 < t'(0) < 1$ (если $t(x) > x$ для всех $x \in X = (0, d)$ и $t'(0) > 1$, то достаточно сделать замену $x = t^{-1}(y)$), то существует единственное однопараметрическое семейство строго монотонно возрастающих, вогнутых/выпуклых решений

$$u(x) = c\left[\lim_{k \to \infty} t_k(x)/t_k(x_0) - b_t/(a_t - 1)\right], x \in X, \quad (27)$$

функционального уравнения (26), где $c > 0$, $x_0 \in X$, $\{t_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность итераций функции $t : t_0(x) = x$, $t_{k+1}(x) = t(t_k(x))$, $k = 0, 1, \ldots$.

Ниже приведены непрерывные строго монотонно возрастающие решения функционального уравнения (26), соответствующие конкретным шкалам измерения.

Утверждение 3.

"Содержательные" непрерывные строго монотонно возрастающие функции полезности (порождающие функции инвариантных непрерывных средних по Колмогорову) имеют с точностью до линейного преобразования следующий вид:

в шкале отношений [32, с. 220; 35, с. 88 – 90; 37; 39; 40] —

$$u(x) = \ln x \text{ или } u(x) = \mathrm{sgn}(\lambda) x^{\lambda},\ \lambda \neq 0,$$
$$\text{когда } X = \mathbf{R}_+,$$

$$u(x) = x^{\lambda},\ \lambda > 0, \text{когда } X = \mathbf{R}_+ \cup \{0\},$$

$$u(x) = -\ln|x| \text{ или } u(x) = -\mathrm{sgn}(\lambda)|x|^{\lambda},\ \lambda \neq 0,$$

$$\text{когда } X = \mathbf{R}_-, \tag{28}$$

$$u(x) = -|x|^{\lambda},\ \lambda > 0, \text{ когда } X = \mathbf{R}_- \cup \{0\},$$

$$u(x) = \mathrm{sgn}(x) a^{\mathrm{sgn}(x)} |x|^{\lambda},\ \lambda > 0,\ a > 0,$$

$$\text{когда } X = \mathbf{R}$$

(геометрическое и степенные взвешенные средние);

в шкале логарифмических отношений [37, 39] —

$$u(x) = \ln\ln x \text{ или } u(x) = \mathrm{sgn}(\lambda) \ln^{\lambda} x,\ \lambda \neq 0,$$

$$\text{когда } X = (1,\ \infty),$$

$$u(x) = \ln^{\lambda} x,\ \lambda > 0, \text{ когда } X = [1,\ \infty),$$

$$u(x) = -\ln|\ln x| \text{ или } u(x) = -\mathrm{sgn}(\lambda)|\ln x|^{\lambda},\ \lambda \neq 0,$$

$$\text{когда } X = (0,\ 1), \tag{29}$$

$$u(x) = -|\ln x|^{\lambda},\ \lambda > 0, \text{ когда } X = (0,\ 1],$$

$$u(x) = \mathrm{sgn}(\ln x) a^{\mathrm{sgn}(\ln x)} |\ln x|^{\lambda},\ \lambda > 0,\ a > 0,$$

$$\text{когда } X = \mathbf{R}_+$$

(логарифмически-логарифмическое и логарифмически-степенные взвешенные средние);

в шкале разностей [29; 32, с. 219 – 220; 37; 40] –

$$u(x) = x \quad \text{или} \quad u(x) = \mathrm{sgn}(\lambda) e^{\lambda x},\ \lambda \neq 0 \tag{30}$$

(арифметическое и экспоненциальное взвешенные средние);

в шкале интервалов [32, с. 220; 37] —

$$u(x) = x \tag{31}$$

(арифметическое взвешенное среднее);

в шкале логарифмических интервалов [37] —

$$u(x) = \ln x \tag{32}$$

(геометрическое взвешенное среднее);

в шкале порядка таковых не существует (результат следует из предыдущих пунктов).

Отметим, что если множество вероятностных распределений F недостаточно "богато", то "содержательные" функции полезности (инвариантные средние по Колмогорову) в шкале порядка могут существовать. Например, таковой является произвольная монотонно возрастающая функция полезности, если между любыми двумя элементами $f_1, f_2 \in F$ имеет место отношение нестрогого стохастического доминирования первого рода: $f_1(x) \leq f_2(x)$ или $f_1(x) \geq f_2(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$ [41, с. 446]. Стохастический аналог данного утверждения получен в работе [25, с. 154 – 156].

Ряд выводов, приведенных в утверждении 3, оказывается справедливым и для более широких, чем уравнение (24), классов средних [2, 39, 42]. В число таковых входит обобщенное квазиарифметическое среднее [39], определяемое равенством

$$M_{u_1,\ldots,u_n}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)\right),$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \tag{33}$$

где непрерывные порождающие функции $u_1(x)$, …, $u_n(x)$ одновременно строго монотонно возрастают или убывают. Для него аналог соотношения (25) имеет вид

$$M_{u_1,\ldots,u_n}(\mathbf{x}) = M_{u_1 \circ t,\ldots,u_n \circ t}(\mathbf{x}),\ t \in T. \tag{34}$$

Согласно работе [39], два обобщенных квазиарифметических средних $\left(M_{u_1,\ldots,u_n}(\mathbf{x}) \text{ и } M_{u_1 \circ t,\ldots,u_n \circ t}(\mathbf{x})\right)$ эквивалентны (в смысле равенства (34) для произвольного вектора $\mathbf{x} \in X^n$) тогда и только тогда, когда найдутся такие константы $a_t \neq 0, b_t^{(1)}, \ldots, b_t^{(n)}$, что порождающие непрерывные преобразования $u_1, \ldots, u_n, u_1 \circ t, \ldots, u_n \circ t$ связаны системой функциональных уравнений вида (26):

$$u_i\left(t(x_i)\right) = a_t u_i(x_i) + b_t^{(i)},\ x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n. \quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемых шкалах количественных признаков решения $u_1, \ldots, u_n$ системы (35) являются линейными преобразованиями одной из функций (28) – (32) (за исключением шкалы отношений при $X = \mathbf{R}$ и шкалы логарифмических отношений при $X = \mathbf{R}_+$). Иными словами, в указанных случаях инвариантное обобщенное квазиарифметическое среднее совпадает с некоторым инвариантным дискретным взвешенным средним по Колмогорову.

Таким образом, систематизированы некоторые результаты, касающиеся характеризации инвариантных средних в нескольких наиболее часто используемых классах — линейно-однородных средних, средних по Коши, средних по Колмогорову и других. Рассматриваемые в работе методы применимы для нахождения инвариантов и в других классах средних [2, 31, 42].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970. — 448 с.
2. *Dhombres J.* Moyennes. — Nantes: Mathématiques de l'Université de Nantes, 1982. — 246 p.
3. *Marichal J.-L.* Aggregation Operations for Multicriteria Decision Aid. Ph. D. Dissertation in Mathematics. University of Liège, Belgium. 1998. 244 p.
4. *Chisini O.* / Periodico di matematiche. 1929. V. 9. № 4. P. 106 – 116.
5. *Aczél J., Roberts F.S.* / Mathematical Social Sciences. 1989. V. 17. P. 205 – 243.
6. *Cauchy A.L.* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. V. 1. Analyse algébrique. — Paris: de l'Imprimerie Royale, 1821. — 576 p.
7. *Орлов А.И.* / Заводская лаборатория. 1999. Т. 65. № 3. С. 57 – 62.
8. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. — 248 с.
9. *Толстова Ю.Н.* / Заводская лаборатория. 1999. Т. 65. № 3. С. 49 – 56.
10. *Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A.* Foundations of measurement. V. 1. — New York: Academic Press, 1971. — 577 p.
11. *Luce R.D., Krantz D.H., Suppes P., Tversky A.* Foundations of measurement. V. 3. — New York: Academic Press, 1990. — 356 p.
12. *Roberts F.S.* Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility and the Social Sciences. — London: Addison-Wesley, 1979. — 420 p.
13. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. — М.: Большая российская энциклопедия, 1999. — 910 с.
14. *Roberts F.S., Rosenbaum Z.* / Mathematical Social Sciences. 1986. V. 12. P. 77 – 95.
15. *Высоцкий В.С.* — В кн.: Прикладной многомерный статистический анализ. — М.: Наука, 1978. С. 317 – 321.
16. *Luce R.D.* / Psychological Review. 1959. V. 66. № 2. P. 81 – 95.
17. *Kim S.-R.* / Mathematical Social Sciences. 1990. V. 20. P. 19 – 36.
18. *Luce R.D.* / Journal of Mathematical Psychology. 1964. V. 1. № 2. P. 278 – 284.
19. *Luce R.D.* / Psychological Review. 1990. V. 97. № 1. P. 66 – 77.
20. *Osborne D.K.* / Journal of Mathematical Psychology. 1970. V. 7. № 2. P. 236 – 242.
21. *Бриджмен П.* Анализ размерностей. — Ижевск: РХД, 2001. — 148 с.
22. *Falmagne J.C., Narens L.* / Synthese. 1983. V. 55. P. 287 – 325.
23. *Narens L.* Theories of Meaningfulness. — London: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. — 472 p.
24. *Roberts F.S.* / Journal of Mathematical Psychology. 1985. V. 29. P. 311 – 332.
25. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.
26. *Marichal J.-L.* / Journal of Mathematical Psychology. 2002. V. 46. № 6. P. 661 – 676.
27. *Ovchinnikov S.* / Mathematical Social Sciences. 1996. V. 32. № 1. P. 39 – 56.
28. *Мешалкин Л.Д.* / Статистические методы анализа экспертных оценок: Ученые записки по статистике. Т. 29. — М.: Наука, 1977. С. 215 – 219.
29. *Bell D.E., Fishburn P.C.* / Journal of Risk and Uncertainty. 2000. V. 20. P. 5 – 44.
30. *Клейнер Г.Б.* / Экономика и математические методы. 2002. Т. 38. № 3. С. 40 – 49.
31. *Fodor J.C., Roubens M.* / Journal of Computational and Applied Mathematics. 1995. V. 64. P. 103 – 115.
32. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными. — М.: Физматлит, 2003. — 432 с.
33. *Яновская Е.Б.* / Автоматика и телемеханика. 1989. № 6. С. 129 – 138.
34. *Ovchinnikov S., Dukhovny A.* / Journal of Mathematical Psychology. 2002. V. 46. № 1. P. 12 – 18.
35. *Харди Г.Г., Литлвуд Дж.И., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
36. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
37. *Орлов А.И.* / Математические заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 561 – 568.
38. *Kuczma M.* Functional Equations in a Single Variable. — Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968. — 383 p.
39. *Aczél J.* / Aequationes Mathematicae. 1984. V. 27. P. 288 – 307.
40. *Rothblum U.G.* / Journal of Economic Theory. 1975. V. 10. № 3. P. 309 – 332.
41. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.
42. *Aczél J., Daróczy Z.* / Publicationes Mathematicae Debrecen. 1963. V. 10. P. 171 – 190.