А.Г. Алексеев, М.В. Соколов[1]

ИНДЕКС ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВОГО ВЛОЖЕНИЯ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ[2]

АННОТАЦИЯ

Предложено аксиоматическое обоснование индекса доходности финансового вложения и нескольких его модификаций. Данные модификации обобщают традиционный показатель доходности в следующих направлениях: (a) на случай отличного от экспоненциального типов дисконтирования и/или наличия инфляции; (b) на случай, когда «затраты» и «результаты» являются элементами более общего, нежели вещественная прямая, пространства.

Ключевые слова: доходность, инвестиционный проект, отношение предпочтения, межвременной выбор

1. Введение

Известно множество показателей доходности потока платежей по инвестиционному проекту: индекс рентабельности, внутренняя норма доходности, индуцированная норма доходности [1], предельная доходность [2], доходность, основанная на применении двойственных переменных [4, §5.4], а также ряд модификаций данных показателей (см., например, [3, 7, 22]). Вместе с тем наличие разнообразных методов решения какой-либо задачи (в данном случае, задачи оценки доходности) зачастую косвенно свидетельствует об ограниченности сферы применимости каждого из них. В какой-то мере это подтверждает работа [22], в которой в рамках естественной аксиоматики доказана невозможность разбиения инвестиционных проектов на «приемлемые» (по уровню получаемой доходности) и «неприемлемые». Отсюда, в частности, следует невозможность задания на множестве инвестиционных проектов отношения предпочтения, удовлетворяющего некоторым естественным свойствам. Тем не менее, такое отношение удается определить либо отказавшись от требования полноты (сравнимости любых двух проектов) [22], либо ограничившись некоторым подмножеством множества всех возможных проектов [3, 23]. Так ситуация существенно упрощается, если ограничиться рассмотрением простейших инвестиционных проектов (ниже называемых *финансовыми вложениями*), предполагающих инвестирование некоторой суммы x в момент времени t и получение суммы x' в момент времени t' $(>t)$. Большинство показателей доходности в этом случае сводится к индексу

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ). Проект 10-06-00130.

[2] Авторы признательны профессору С.А. Смоляку за ценные замечания и предложения, способствовавшие улучшению рукописи.

$$I_0(x,t;x',t') = \frac{\ln(x'/x)}{t'-t} \quad (1)$$

или монотонно возрастающему преобразованию от него. Однако даже в рассматриваемом простом случае возможны вариации показателя (1) на случай отличных от экспоненциального типов дисконтирования, наличия инфляции и т.п. [3, 22].

Теоретические исследования, по-видимому, не в состоянии дать однозначного ответа о виде показателя доходности для инвестиционных проектов (примером здесь могут служить более чем столетние «NPV–IRR» дебаты о критерии выбора среди альтернативных инвестиционных проектов (см., например, [21])), но способны четко очертить границы применимости существующих. Это может быть сделано с помощью аксиоматического подхода, предполагающего характеризацию показателей перечислением их свойств. Данный подход достаточно успешно применяется как в области оценки эффективности инвестиционных проектов, так и смежных областях [3, 12–14, 16, 20, 23].

Цель настоящей работы – предложить аксиоматическое обоснование индекса доходности I_0 и ряда его модификаций. Данные модификации обобщают индекс I_0 в следующих двух направлениях:

1. На случай отличных от экспоненциального типов дисконтирования и/или наличия инфляции. Целесообразность подобно рода модификаций продиктована повышенным интересом исследователей к типам дисконтирования, отличным от схемы сложных процентов [9, 16, 24, 25]. Этот интерес, в свою очередь, обусловлен множеством аномалий, присущих экспоненциальному дисконтированию (см., например, [16]).
2. На случай, когда «затраты» (x) и «результаты» (x') проекта являются элементами более общего, нежели вещественная полупрямая, пространства (более точно, сепарабельного метрического пространства). Приведем несколько примеров, когда такое обобщение оправдано:

– «затраты» и «результаты» проекта носят векторный характер (оценка доходности вложения в портфель разнородных активов, многокритериальная оценка «результатов» проекта и др.);

– оценка доходности проекта в условиях интервальной неопределенности в отношении инвестируемой и возвращаемой сумм;

– оценка доходности в условиях вероятностной неопределенности в отношении инвестируемых и возвращаемых средств.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведены необходимые определения, позволяющие ввести понятие индекса доходности. Раздел 3 устанавливает взаимосвязь введенных понятий с объектами, изучаемыми в теории межвременного выбора. В разделе 4 рассмотрено несколько конкретных индексов доходности, приведены их интерпретации и свойства. В разделе 5 даны характеризации введенных в разделе 4 индексов перечислением их свойств. Случай, когда «затраты» и «результаты» проекта имеют денежную природу подробно разобран в разделе 6. Наконец, в разделе 7 показано, что результаты разделов 5 и 6 могут быть полезны для оценки доходности проектов в условиях вероятностной неопределенности.

2. Определение индекса доходности

Ниже используются следующие обозначения: R_+ и R – множества положительных и всех действительных чисел соответственно.

Пусть $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ – сепарабельное метрическое пространство. Элементы данного пространства будем называть (*денежными*) *суммами*. Положим $\mathrm{V} = \{(x,t;x',t') \in (\mathrm{X}\times\mathrm{R})^2 : t < t'\}$. Элемент $v = (x,t;x',t')$ множества V будем интерпретировать как простейшее *финансовое вложение*: инвестирование суммы x в момент времени t и получение суммы x' в момент времени t'. Данный тип финансовых операций (совместно с в определенном смысле обратным к нему – финансовым обязательством, состоящем в получении суммы x в момент времени t и возврат суммы x' в момент времени $t' > t$) является одним из наиболее распространенных на финансовом рынке.

Базовое предположение при построении искомого показателя (индекса) доходности состоит в том, что финансовые вложения могут быть упорядочены по уровню доходности. Возможность такого упорядочивания мы будем отождествлять с предположением о том, что на множестве V задано бинарное отношение $\succeq$, называемое *отношением доходности*, и удовлетворяющее следующим свойствам:

A1. *Полный предпорядок*: $\succeq$ – полное транзитивное бинарное отношение.

A2. *Непрерывность*: для любого $v \in \mathrm{V}$ множества $\{v' \in \mathrm{V} : v' \succeq v\}$ и $\{v' \in \mathrm{V} : v \succeq v'\}$ замкнуты в V.[3]

A3. *Межвременная согласованность*:

$$(x,t;x',t') \succeq (x,t;y',t') \Rightarrow (y,\tau;x',\tau') \succeq (y,\tau;y',\tau') \text{ для любых } \tau < \tau' \text{ и } y \in \mathrm{X};$$

$$(x,t;x',t') \succeq (x,t;y',t') \Leftrightarrow (y',t;x,t') \succeq (x',t;x,t').$$

Требование A1 гарантирует возможность и корректность сравнения доходностей различных вложений. Требование A2 предполагает, что малые изменения характеристик

[3] Здесь и далее V метризуется метрикой прямого произведения $d_\mathrm{V}\big((x,t;x',t'),(y,\tau;y',\tau')\big) = \sqrt{d_\mathrm{X}^2(x,y) + (t-\tau)^2 + d_\mathrm{X}^2(x',y') + (t'-\tau')^2}$.

финансовых вложений не приводят к значительным изменениям в упорядочивании их по доходности. Совместно требования A1 и A2 гарантируют существование непрерывного числового представления $I : \mathrm{V} \to \mathrm{R}$ отношения $\succeq$ [11]:

$$v \succeq v' \;\Leftrightarrow\; I(v) \geq I(v'), \tag{2}$$

в дальнейшем называемого *индексом доходности* (иногда, для краткости, просто *доходностью*). Наконец, требование A3 эквивалентно существованию на множестве X полного предпорядка $\succeq_0$, удовлетворяющего следующим свойствам:

$$\begin{aligned} (x,t;x',t') \succeq (x,t;y',t') \;&\Leftrightarrow\; x' \succeq_0 y'; \\ (x,t;x',t') \succeq (y,t;x',t') \;&\Leftrightarrow\; y \succeq_0 x. \end{aligned} \tag{3}$$

Данное отношение описывает неменяющуюся со временем *систему предпочтений* инвестора на множестве X.

Симметричную и асимметричную части $\succeq$, $\succeq_0$ обозначим через $\sim$, $\sim_0$ и $\succ$, $\succ_0$, соответственно. Так если $v \succ v'$ ($x \succ_0 x'$), то будем говорить, что вложение (сумма) v (x) *доходнее* (*предпочтительнее*) вложения (суммы) v' (x'). Инверсии $\succeq$, $\succeq_0$, $\succ$ и $\succ_0$ обозначим за $\preceq$, $\preceq_0$, $\prec$ и $\prec_0$, соответственно.

Классическим примером отношения доходности $\succeq$ с $\mathrm{X} = \mathrm{R}_+$ и

$$x \succeq_0 x' \;\Leftrightarrow\; x \geq x'$$

служит отношение, числовое представление которого имеет вид I_0 (1). Очевидно, индекс доходности определен с точностью до строго монотонно возрастающего преобразования. Так в практике финансового анализа инвестиций для получения различных показателей доходности используется целый спектр монотонно возрастающих преобразований индекса I_0: $I_0 - r$, где r – темп инфляции, – реальная эффективная (логарифмическая) доходность, e^{I_0} – номинальный индекс доходности, $e^{I_0} - 1$ – номинальная доходность и другие.

Предложение 1.

Бинарное отношение $\succeq$ на V является отношением доходности тогда и только тогда, когда найдутся непрерывная функция $u : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ и непрерывная строго монотонно убывающая по первому и возрастающая по третьему аргументам функция $g : \{(y,t;y',t') \in (u(\mathrm{X}) \times \mathrm{R})^2 : t < t'\} \to \mathrm{R}$, такие, что u и $I(x,t;x',t') = g\big(u(x),t;u(x'),t'\big)$ являются числовыми представлениями отношений $\succeq_0$ и $\succeq$ соответственно.

Доказательство.

Пусть $\succeq$ – отношение доходности. A1, A2 и сепарабельность V (как прямого произведения сепарабельных пространств) гарантируют существование непрерывного числового представления I отношения $\succeq$ [11]. Для фиксированных x_0 и $t_0 < t_0'$ положим $u(x) = I(x_0, t_0; x, t_0')$. Из (3) следует, что u является числовым представлением отношения $\succeq_0$ и $I(x,t;x',t') \geq I(x,t;y',t')$ $\Leftrightarrow$ $u(x') \geq u(y')$. Аналогично, $I(x,t;x',t') \geq I(y,t;x',t')$ $\Leftrightarrow$ $u(x) \leq u(y)$. Таким образом, $I(x,t;x',t')$ зависит лишь от $u(x)$, t, $u(x')$, t'.

В обратную сторону утверждение очевидно. ■

Согласно Предложению 1, индекс доходности полностью определяется двумя функциями – u и g, – первая из которых есть *функция полезности* инвестора, вторая – представляет собой числовое представление отношения доходности на множестве $\{(y,t;y',t') \in (u(\mathrm{X}) \times \mathrm{R})^2 : t < t'\}$ с естественным порядком на множестве $u(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{R}$ в качестве системы предпочтений инвестора. Таким образом, задача определения индекса доходности финансового вложения сводится к измерению темпа роста полезности инвестора.

3. Индексы доходности и межвременной выбор

Введенное понятие отношения доходности тесно связано с проблемой межвременного выбора (см., например, [13, 20]), в рамках которой изучается отношение предпочтения на множестве $\mathrm{X} \times \mathrm{R}$ *датированных платежей* (x,t). Действительно, согласно [20], бинарное отношение $\trianglerighteq$ на множестве $\mathrm{X} \times \mathrm{R}$ называется отношением *межвременного предпочтения*, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

B1. *Полнота*: $\trianglerighteq$ – полное бинарное отношение.

B2. *Непрерывность*: $\trianglerighteq$ непрерывно (в метрике прямого произведения).

B3. *Межвременная согласованность*: существует полный предпорядок $\succeq_0$ на множестве X, такой, что $(x,t) \trianglerighteq (x',t) \Leftrightarrow x \succeq_0 x'$.

Каждому отношению доходности $\succeq$ может быть сопоставлено семейство $\{\trianglerighteq_d,\ d \in \mathrm{R}\}$ полных (но необязательно транзитивных) бинарных отношений на множестве $\mathrm{X} \times \mathrm{R}$, построенных по правилу

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow \begin{cases} I(x,t;x',t') \leq d, & \text{если } t < t' \\ x \succeq_0 x', & \text{если } t = t' \\ I(x',t';x,t) \geq d, & \text{если } t > t' \end{cases}. \tag{4}$$

Легко видеть, что элементы этого семейства удовлетворяют свойствам B1 и B3. Семейство также обладает следующими свойствами:

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t) \Rightarrow (x,t') \trianglerighteq_{d'} (x',t') \text{ для любых } d' \text{ и } t',$$

$$(x,t) \sim_d (x',t'),\ t<t' \Rightarrow (x',t') \vartriangleright_{d'} (x,t) \vartriangleright_{d''} (x',t') \text{ для любых } d'<d<d'', \quad (5)$$

$$\text{для любых } (x,t),(x',t') \in \mathrm{X}\times\mathrm{R},\ t \neq t' \ \exists d \in \mathrm{R}: (x,t) \sim_d (x',t'),$$

где $\sim_d$ и $\vartriangleright_d$ – симметричная и асимметричная части $\trianglerighteq_d$. Свойства (5) допускают естественные интерпретации. Первое из них означает, что все элементы семейства $\{\trianglerighteq_d,\ d \in \mathrm{R}\}$ согласованы (в смысле свойства B3) с одним и тем же отношением предпочтения $\succeq_0$. Согласно второму свойству, с ростом d более поздний из датированных платежей (x,t) и (x',t') становится менее привлекательным для инвестора. Это позволяет интерпретировать параметр d как доходность по альтернативным проектам. Наконец, третье свойство (совместно со вторым) гарантирует существование для любых (x,t) и (x',t'), $t \neq t'$, единственной доходности по альтернативным проектам d, при которой платежи (x,t) и (x',t') безразличны для инвестора.

Обратно, каждому семейству $\{\trianglerighteq_d,\ d \in \mathrm{R}\}$ отношений межвременного предпочтения, обладающему свойствами (5), может быть сопоставлено бинарное отношение $\succeq$ на V, числовое представление I которого имеет вид:

$$I(x,t;x',t') = d: (x,t) \sim_d (x',t). \quad (6)$$

Построенное отношение $\succeq$ удовлетворяет свойствам A1 и A3.

Заметим также, что для любого отношения межвременного предпочтения $\trianglerighteq$ найдется отношение доходности, порождающее $\trianglerighteq$ в соответствии с правилом (4) при некотором d. Действительно, всякое отношение межвременного предпочтения $\trianglerighteq$ допускает числовое представление в виде [20, предложение 1]

$$(x,t) \trianglerighteq (x',t') \Leftrightarrow I(x,t;x',t') \le 0,$$

где функция $I:(\mathrm{X}\times\mathrm{R})^2 \to \mathrm{R}$ непрерывна и кососимметрична: $I(x',t';x,t) = -I(x,t;x',t')$. Бинарное отношение $\succeq$ на множестве V, построенное по правилу (2) (с данной функцией I), удовлетворяет свойствам A1–A3 и порождает отношение $\trianglerighteq$ по правилу (4) с $d=0$.

Соответствия (4) и (6) позволяют сформулировать следующую эвристическую схему построения отношения доходности. В соответствии с ней межвременные предпочтения инвестора описываются семейством $\{\trianglerighteq_d,\ d \in \mathrm{R}\}$ зависящих от параметра d (интерпретируемого как доходность по альтернативным проектам) отношений межвременного предпочтения на множестве датированных платежей $\mathrm{X}\times\mathrm{R}$. Данному семейству соответствует отношение доходности с индексом доходности (6), сопоставляющим вложению $(x,t;x',t')\in \mathrm{V}$ его внутреннюю норму доходности – доходность по альтернативным проектам d, при которой платежи (x,t) и (x',t') для инвестора безразличны. Так если $\mathrm{X}=\mathrm{R}_+$ и элементы семейства $\{\trianglerighteq_d,\ d\in \mathrm{R}\}$ отношений межвременного предпочтения допускают числовое представление в форме приведенной стоимости

$$(x,t)\ \trianglerighteq_d\ (x',t')\ \Leftrightarrow\ e^{-dt}x\geq e^{-dt'}x',$$

то соответствующее отношение доходности описывается индексом I_0 (1).

4. Несколько конкретных индексов доходности обобщающих I_0

Рассмотрим несколько конкретных отношений доходности, порождаемых семействами отношений $\{\trianglerighteq_d,\ d\in \mathrm{R}\}$, играющих важную роль в теории межвременного выбора.

Непосредственным обобщением индекса I_0 на случай когда «затраты» (x) и «результаты» (x') проекта являются элементами более общего, нежели вещественная прямая, пространства и меняющейся во времени нормы доходности по альтернативным проектам, может служить индекс

$$I_1(v)=\begin{cases}\dfrac{u_1(x')-u_1(x)}{\varphi(t')-\varphi(t)}, & \text{если } x'\succeq_0 x\\ \dfrac{u_{-1}(x')-u_{-1}(x)}{\varphi(t')-\varphi(t)}, & \text{иначе}\end{cases}, \tag{7}$$

где $u_{-1},u_1:\mathrm{X}\to\mathrm{R}$ – функции полезности инвестора, φ строго монотонно возрастает и действует на R. Данный индекс характеризует средний темп роста полезности инвестора.

Для облегчения интерпретации индекса I_1 предположим сначала, что $\varphi(t)=t$ и $u_{-1}=u_1=\ln u$. Тогда правила (4) и (6) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между отношением доходности, порождаемым индексом I_1, и семейством $\{\trianglerighteq_d,\ d\in \mathrm{R}\}$ межвременных предпочтений, имеющих числовое представление в форме дисконтированной полезности:

$$(x,t)\ \trianglerighteq_d\ (x',t')\ \Leftrightarrow\ e^{-dt}u(x)\geq e^{-dt'}u(x'). \tag{8}$$

Отношения вида (8) играют фундаментальную роль в теории межвременного выбора.

Функция φ в (7) допускает несколько различных интерпретаций. Согласно одной из них, φ задает преобразование оси времени на себя, в котором норма доходности по альтернативным проектам постоянна. Согласно другой интерпретации, преобразование φ задает тип дисконтирования платежей. Действительно, для произвольного φ рассматриваемое в (8) семейство межвременных предпочтений принимает вид

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow \rho(t)^d u(x) \geq \rho(t')^d u(x'),$$

где $\rho = e^{-\varphi}$. Элементы данного семейства представляют собой отношения дисконтированной полезности общего вида (multiplicative discounting model) [13, §4; 20, §3.2].

Наконец, выбор функций полезности таким образом, что $u_1 \neq u_{-1}$, позволяет моделировать ситуации, в которых инвестор по-разному оценивает вложения, сопряженные с получением выгоды ($x' \succ_0 x$) и несением потерь ($x \succ_0 x'$). Наличие подобного рода асимметрии признается как эмпирической [15], так и теоретической [17] литературой по теории полезности.

Дальнейшее обобщение индекса I_0 связано с семейством межвременных отношений следующего вида (path dependent time preferences [20, §4.2]):

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow u(x) \geq h\big(u(x'), d(\varphi(t') - \varphi(t))\big).$$

Здесь u – функция полезности инвестора, φ интерпретируется аналогично примеру выше, функция h строго монотонно возрастает по первому, убывает по второму аргументам и $h(y,0) \equiv y$. При этом число $h\big(u(x'), d(\varphi(t') - \varphi(t))\big)$ интерпретируется как приведенная (к моменту времени t, по ставке d) полезность/стоимость платежа (x',t'). Если к тому же для любых $(x,t),(x',t') \in \mathrm{X} \times \mathrm{R}$ $\exists d \in \mathrm{R}$: $(x,t) \sim_d (x',t)$, то рассматриваемое семейство удовлетворяет свойствам (5) и порождает по правилу (6) индекс доходности вида

$$I_2(v) = \frac{g\big(u(x), u(x')\big)}{\varphi(t') - \varphi(t)}, \tag{9}$$

где $g(\cdot, y')$ – функция, обратная к $h(y', \cdot)$. Из свойств функции h следует, что $g(y, \cdot)$ строго монотонно возрастает, $g(\cdot, y')$ строго монотонно убывает и $\operatorname{sgn} g(y, y') = \operatorname{sgn}(y' - y)$. Поэтому числитель в (9) естественно интерпретировать как сравнительную полезность, измеряющую степень предпочтительности для инвестора суммы x' по сравнению с суммой x.

Еще одно обобщение индекса I_0 порождается семейством транзитивных межвременных отношений общего вида

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow h_d\big(u(x),t\big) \geq h_d\big(u(x'),t'\big),$$

удовлетворяющим свойствам (5). Здесь $h_d\big(u(\cdot),\cdot\big)$ – числовое представление отношения $\trianglerighteq_d$ (в частности, h_d строго монотонно возрастает по первому аргументу). Число $h_d\big(u(x),t\big)$ интерпретируется как приведенная (к некоторому фиксированному моменту времени, по ставке d) стоимость/полезность платежа (x,t). Данному семейству соответствует индекс доходности I_3, сопоставляющий вложению $(x,t;x',t')\in \mathrm{V}$ единственное решение d уравнения

$$h_d\left(u(x),t\right)=h_d\left(u(x'),t'\right). \qquad (10)$$

Следующие рассуждения призваны интерпретировать соотношение (10) и мотивировать толкование числа $h_d\left(u(x),t\right)$ как приведенной стоимости/полезности платежа (x,t). Для фиксированной функции полезности инвестора u обозначим $\mathrm{Y}=u(\mathrm{X})$ и рассмотрим функцию $w:\mathrm{Y}\times\{(t,t')\in \mathrm{R}^2 : t\le t'\}\to \mathrm{Y}$, значение $w\left(u(x),t,t'\right)$ которой будем интерпретировать как приведенную к моменту времени t' стоимость/полезность платежа (x,t). Разумно потребовать [6, §4.1], чтобы w удовлетворяла следующим свойствам:

$$w(y,t,t)=y;\; w(y,t,t'')=w\left(w(y,t,t'),t',t''\right),\; t<t'<t''. \qquad (11)$$

Свойства (11) допускают естественную интерпретацию – последовательное применение операции приведения ведет к редукции даты привидения. Если к тому же для любого $t<t'$ $w(\,\cdot\,,t,t')$ есть биекция Y на себя, то общее решение системы функциональных уравнений (11) имеет вид [19]

$$h\left(w(y,t,t'),t'\right)=h(y,t), \qquad (12)$$

где $h:\mathrm{Y}\times\mathrm{R}\to\mathrm{Y}$ – произвольная функция, такая, что при любом t $h(\,\cdot\,,t)$ есть биекция Y на себя. Более того [19], h может быть выбрана таким образом, что $h(y,t_0)=y$, где t_0 – произвольный фиксированный момент времени. При такой нормировке число $h\left(u(x),t\right)$ естественно интерпретировать как приведенную к моменту времени t_0 стоимость/полезность платежа (x,t). Приведенные рассуждения оправдывают интерпретацию числа $h_d\left(u(x),t\right)$ как приведенной (по ставке d) стоимости/полезности и позволяют рассматривать уравнение (10) как выбор такой нормы доходности по альтернативным проектам, при которой платежи (x,t) и (x',t') имеют одну и ту же приведенную стоимость/полезность.

Важный частный случай, когда функции h_d, $d\in\mathrm{R}$ в (10) представимы в виде

$$h_d(y,t)=g_d(y)+\delta_d t, \qquad (13)$$

где функции g_d строго монотонно возрастают и $\delta_d\in\{-1,0,1\}$, исследован в работах [6, §4.1; 10, с. 80, пример 5.3; 12]. Он соответствует предположению о стационарности операции приведения:

$$w(y,t,t')=w(y,t+\tau,t'+\tau) \text{ для любого } \tau. \qquad (14)$$

Действительно, при минимальных условиях регулярности [18, теорема 3] общее непрерывное решение системы функциональных уравнений (11) и (14) имеет вид (12) с $h(y,t)=g(y)+\delta t$, где функция g строго монотонно возрастает, действует на R и

$\delta \in \{-1,0,1\}$. Индекс доходности, сопоставляющий вложению $(x,t;x',t') \in \mathrm{V}$ решение d уравнения (10) с функциями h_d вида (13), обозначим за I_4.

5. Характеризации индексов $I_1 - I_4$

В настоящем разделе показано, что каждый из четырех введенных в разделе 4 индексов доходности может быть характеризован определенным сочетанием следующих свойств.

Монотонность по срокам:

(i) A) если $x' \succ_0 x$, то $(x,\tau;x',t') \succ (x,t;x',t') \succ (x,t;x',\tau')$ для любых $t < \tau < t' < \tau'$; если $x \succ_0 x'$, то $(x,\tau;x',t') \succ (x,t;x',t') \succ (x,t;x',\tau')$ для любых $\tau < t < \tau' < t'$; если $x \sim_0 x'$ и $y \sim_0 y'$, то $(x,t;x',t') \sim (y,\tau;y',\tau')$ для любых $t < t'$, $\tau < \tau'$; B) для любых $(x,t;x',t'),(y,\tau;y',\tau') \in \mathrm{V}$ таких, что либо $x \succ_0 x'$ и $y \succ_0 y'$, либо $x' \succ_0 x$ и $y' \succ_0 y$, найдутся числа $\tau_1, \tau_2, \tau_1', \tau_2'$ такие, что $(y,\tau_1;y',\tau') \succeq (x,t;x',t') \succeq (y,\tau_2;y',\tau')$ и $(y,\tau;y',\tau_1') \succeq (x,t;x',t') \succeq (y,\tau;y',\tau_2')$.

Усредняемость:

(ii) $(x,t;x',t') \approx (x',t';x'',t'')$ $\Leftrightarrow$ $(x,t;x',t') \approx (x,t;x'',t'')$ $\Leftrightarrow$ $(x,t;x'',t'') \approx (x',t';x'',t'')$, где $t < t' < t''$, $\approx$ – одно из отношений $\succ, \prec$.

Инвариантность относительно сдвига времени:

(iii) найдется строго монотонно возрастающая функция φ, действующая на R, такая, что $(x,t;x',t') \sim (x,\varphi^{-1}(\varphi(t)+\tau);x',\varphi^{-1}(\varphi(t')+\tau))$ для любого $\tau \in \mathrm{R}$.

Ковариантность относительно выбора шкалы измерения времени:

(iv) найдется строго монотонно возрастающая функция φ, действующая на R, такая, что для любых действительных $a > 0$ и b $(x,t;x',t') \succeq (x,\tau;x',\tau') \Rightarrow$ $(x,\varphi^{-1}(a\varphi(t)+b);x',\varphi^{-1}(a\varphi(t')+b)) \succeq (x,\varphi^{-1}(a\varphi(\tau)+b);x',\varphi^{-1}(a\varphi(\tau')+b))$.

Свойства (i)–(iv) допускают естественную экономическую интерпретацию, различные их версии используются во множестве аксиоматизаций межвременных предпочтений (см., например, [3, 13, 20]). Так предполагается (свойство (i), A), что доходность вложения $(x,t;x',t')$ монотонно возрастает (убывает) с ростом срока вложения при $x \succ_0 x'$ ($x' \succ_0 x$) (impatience condition [13, аксиома A3]) и не зависит от срока вложения при $x' \sim_0 x$ (procrastination condition [13, аксиома A3]). Кроме того, предполагается (свойство (i), B), что любое вложение может быть сделано сколь угодно привлекательным/малопривлекательным для инвестора изменением срока инвестиций (time sensitivity [20, аксиома A1]).

Согласно свойству (ii), если доходности за два последовательных периода времени равны соответственно d и d', то доходность за объединенный период не ниже минимальной из d и d' и не выше максимальной из них [3]. Из (ii), в силу свойства непрерывности A2, также следует

$$(x,t;x',t') \sim (x',t';x'',t'') \Leftrightarrow (x,t;x',t') \sim (x,t;x'',t'') \Leftrightarrow (x,t;x'',t'') \sim (x',t';x'',t''). \qquad (15)$$

То есть, если доходности за два последовательных периода времени равны, такой же будет и доходность за объединенный период. Легко удостовериться, что свойство (ii) также гарантирует транзитивность отношений межвременного предпочтения $\trianglerighteq_d$, порождаемых отношением $\succeq$ в соответствии с правилом (4).

Согласно свойству (iii), существует преобразование оси времени, в котором доходность вложения не зависит от сдвига времени. Данное свойство формализует аксиому стационарности межвременных предпочтений [13, аксиома A5] применительно к задаче измерения доходности финансовых вложений.

Наконец, свойство (iv) предполагает существование такого преобразования оси времени, в котором время измеряется по шкале интервалов. Данное свойство обобщает аксиому инвариантности при аффинном преобразовании оси времени в [3]. Подобно примерам выше функция φ в свойствах (iii) и (iv) задает преобразование оси времени на себя, в котором норма доходности по альтернативным проектам постоянна.

Заметим, что свойства (i)–(iv) не являются независимыми. Так ниже нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Предложение 2.

(i) и (iv) $\Rightarrow$ (iii) (с тем же преобразованием φ, что и в (iv)).

Доказательство.

Определим отношение $\succeq_\varphi$ на множестве V согласно правилу

$$(x,t;x',t') \succeq_\varphi (y,\tau;y',\tau') \Leftrightarrow (x,\varphi^{-1}(t);x',\varphi^{-1}(t')) \succeq (y,\varphi^{-1}(\tau);y',\varphi^{-1}(\tau')). \qquad (16)$$

$\sim_\varphi$, $\succ_\varphi$ – его симметричная и асимметричная части. Поскольку φ строго монотонно возрастает, действует на R и, следовательно, непрерывна, то $\succeq_\varphi$ также является отношением доходности и удовлетворяет свойству (i) (с заменой $\succeq$ на $\succeq_\varphi$). В новых обозначениях соотношения (iii) и (iv) принимают вид:

(iii)$_\varphi$ $\quad (x,t;x',t') \sim_\varphi (x,t+\tau;x',t'+\tau) \ \forall\, \tau \in \mathrm{R}$,

(iv)$_\varphi$ $\quad (x,t;x',t') \succeq_\varphi (x,\tau;x',\tau') \Rightarrow (x,at+b;x',at'+b) \succeq_\varphi (x,a\tau+b;x',a\tau'+b) \ \forall\, a>0,\ b$.

Рассмотрим произвольное вложение $(x,t_1;x',t_1')\in \mathrm{V}$. Если $x \sim_0 x'$, то (iii)$_\varphi$ следует из (i). Далее предполагается, что $x' \succ_0 x$ (случай $x \succ_0 x'$ рассматривается аналогично). Предположим противное: пусть

$$(x,t_1;x',t_1') \succ_\varphi (x,t_1+\tau;x',t_1'+\tau) \tag{17}$$

для некоторого $\tau>0$ (случай $\tau<0$ разбирается аналогично). Положим $t_2=t_1+\tau$. Обозначим за t_2' решение уравнения $(x,t_1;x',t_1') \sim_\varphi (x,t_2;x',t_2')$. В силу (i), A2 и (17) оно существует, единственно и $0<t_2'-t_2<t_1'-t_1$.

Пусть $a\in(0,1)$, $b\in \mathrm{R}$ есть решение системы линейных уравнений $at_1+b=t_2$, $at_1'+b=t_2'$. Рассмотрим две последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $\{t_k'\}_{k=1}^\infty$, построенные по правилу: $t_{k+1}=at_k+b$, $t_{k+1}'=at_k'+b$, $k=1,2,...$ По построению обе последовательности возрастающие, имеют общий предел $t^*=b/(1-a)$ и $t_k<t_k'$, $k=1,2,...$

Пусть t $(<t^*)$ – единственное (в силу (i) и A2) решение уравнения $(x,t_1;x',t_1') \sim_\varphi (x,t;x',t^*)$. Из свойства (iv)$_\varphi$ с введенными выше константами a, b и транзитивности $\succeq_\varphi$ следует $(x,t_1;x',t_1') \sim_\varphi (x,t_k;x',t_k')$, $k=2,3,...$ Таким образом,

$$(x,t;x',t^*) \sim_\varphi (x,t_k;x',t_k') \text{ для всех } k=1,2,... \tag{18}$$

Поскольку последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $\{t_k'\}_{k=1}^\infty$ возрастающие и сходятся к t^*, то найдется k, такое, что $t\le t_k<t_k'<t^*$, что совместно с (18) противоречит (i). Установленное противоречие доказывает Предложение 2. ■

Утверждение 1. Характеризация индекса I_2 (9).

Пусть $\succeq$ – отношение доходности. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\succeq$ удовлетворяет свойствам (i) и (iv);

(b) найдутся непрерывные функции $u:\mathrm{X}\to\mathrm{R}$ и $g:u(\mathrm{X})^2\to\mathrm{R}$, такие, что I_2 (9) является индексом доходности для $\succeq$.

Доказательство.

Пусть $\succeq_\varphi$ – отношение, построенное по правилу (16). Из Предложений 1 и 2 следует существование непрерывных функций $u:\mathrm{X}\to\mathrm{R}$ и $g_1:\mathrm{Y}^2\times\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}$, где $\mathrm{Y}=u(\mathrm{X})$, таких, что u является числовым представлением отношения $\succeq_0$, $(x,t;x',t')\mapsto g_1\big(u(x),u(x');t'-t\big)$ является числовым представлением отношения $\succeq_\varphi$. В силу (i) $g_1(y,y';\cdot)$ строго монотонно убывает при $y<y'$, возрастает при $y>y'$ и тождественно равна константе при $y=y'$.

Если Y одноточечное множество, то, в силу (i), индекс (9) с $g \equiv 0$ является индексом доходности для $\succeq$. Если множество Y содержит хотя бы две различные точки, то введем функцию

$$g_2(t) = \begin{cases} g_1(y_0, y_0'; -t), \text{ если } t < 0 \\ g_1(y_0, y_0; 1), \text{ если } t = 0 \\ g_1(y_0', y_0; t), \text{ если } t > 0 \end{cases},$$

где $y_0 < y_0'$ – произвольные фиксированные элементы Y. В силу (i) $g_2 : \mathrm{R} \to g_1(\mathrm{Y}^2 \times \mathrm{R}_+)$ строго монотонно возрастает и действует на множество $g_1(\mathrm{Y}^2 \times \mathrm{R}_+)$. Поэтому функция $(x,t;x',t') \mapsto g_3\big(u(x),u(x');t'-t\big)$, где $g_3 = g_2^{-1} \circ g_1$, корректно определена и также является индексом доходности для $\succeq_\varphi$.

Пусть $(y,y';\tau) \in \mathrm{Y}^2 \times \mathrm{R}_+$, положим $\tau' = g_3(y,y';\tau)$. Из свойства (iv) и определения функции g_3, следует, что $g_3(y,y';a\tau) = \tau'/a = g_3(y,y';\tau)/a$ для любого $a > 0$, откуда $g_3(y,y';t'-t) = g_3(y,y';1)/(t'-t)$, что соответствует (9) с $g(\cdot) = g_3(\cdot;1)$. Из (i) следует, что $g(y,\cdot)$ строго монотонно возрастает, $g(\cdot,y')$ строго монотонно убывает и $\operatorname{sgn} g(y,y') = \operatorname{sgn}(y'-y)$.

В обратную сторону утверждение очевидно. ■

Утверждение 2. Характеризация индекса I_1 (7).

Пусть $\succeq$ – отношение доходности. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\succeq$ удовлетворяет свойствам (i), (ii) и (iv);

(b) найдутся непрерывные функции полезности $u_{-1}, u_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$, такие, что I_1 (7) является индексом доходности для отношения $\succeq$.

Доказательство.

Согласно Утверждению 1, найдутся функции $u : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ и $g : u(\mathrm{X})^2 \to \mathrm{R}$ такие, что I_2 (9) является числовым представлением отношения $\succeq$. Если $\mathrm{Y} = u(\mathrm{X})$ – одно- или двухэлементное множество, то индекс (9) представим в виде (7) для подходящим образом подобранных функций u_{-1} и u_1. В противном случае, для произвольных $(y,y',y'') \in \mathrm{Y}^3$, таких, что $(y'-y)(y''-y') > 0$ положим $t'' = g(y',y'')/g(y,y') > 0$. Из (ii) с выбранными y, y', y'', t'' и $t = -1$, $t' = 0$ следует

$$\frac{g(y,y')}{1} = \frac{g(y',y'')}{t''} = \frac{g(y,y'')}{1+t''}$$

(см. (15)). Откуда

$$g(y,y')+g(y',y'')=g(y,y''). \tag{19}$$

Из свойств функции g следует, что (19) справедливо при $(y'-y)(y''-y')\geq 0$. Обозначим

$$u_{-1}(y)=\begin{cases} g(y_0,y), & \text{если } y<y_0 \\ -g(y,y_0), & \text{если } y\geq y_0 \end{cases},\ u_1(y)=\begin{cases} -g(y,y_0), & \text{если } y<y_0 \\ g(y_0,y), & \text{если } y\geq y_0 \end{cases},$$

где y_0 – фиксированный элемент Y. Из свойств g следует, что u_{-1},u_1 строго монотонно возрастают и, следовательно, функции $u_i\circ u$, $i=-1{,}1$ являются числовыми представлениями отношения $\succeq_0$. Общее решение функционального уравнения Синцова (19) на множестве $\{(y,y',y'')\in \mathrm{Y}^3 : (y'-y)(y''-y')\geq 0\}$ имеет вид

$$g(y_1,y_2)=\begin{cases} u_1(y_2)-u_1(y_1), & \text{если } y_1<y_2 \\ u_{-1}(y_2)-u_{-1}(y_1), & \text{если } y_1\geq y_2 \end{cases}. \tag{20}$$

Действительно, выберем произвольные $y_1<y_2$ из Y. Если $y_0\leq y_1<y_2$, то из (19) с $y=y_0$, $y'=y_1$, $y''=y_2$ следует (20). Если $y_1<y_0\leq y_2$, то (19) с $y=y_1$, $y'=y_0$, $y''=y_2$ влечет (20). Если $y_1<y_2<y_0$, то из (19) с $y=y_1$, $y'=y_2$, $y''=y_0$ следует (20). Аналогичные рассуждения показывают, что (20) справедливо при $y_1\geq y_2$.

В обратную сторону утверждение очевидно. ■

Утверждение 3. Характеризация индекса I_3 (10).

Если отношение доходности $\succeq$ удовлетворяет свойству (ii), то найдутся непрерывная функция полезности u и семейство функций $\{h_d : u(\mathrm{X})\times \mathrm{R}\to \mathrm{R},\ d\in \mathrm{D}\subseteq \mathrm{R}\}$, такие, что функция I_3, сопоставляющая вложению $(x,t;x',t')\in \mathrm{V}$ единственное решение d уравнения (10), является индексом доходности для $\succeq$.

Доказательство.

Пусть u и I – числовые представления отношений $\succeq_0$ и $\succeq$, соответственно (Предложение 1). Обозначим $\mathrm{Y}=u(\mathrm{X})$, $\mathrm{D}=I(\mathrm{V})$. Определим семейство $\{\sim_d,\ d\in \mathrm{D}\}$ бинарных отношений на множестве $\mathrm{Y}\times \mathrm{R}$ согласно правилу: $(y,t)\sim_d (y',t')$ $\Leftrightarrow$ либо $(y,t)=(y',t')$, либо $t<t'$ и $g(y,t;y',t')=d$, либо $t>t'$ и $g(y',t';y,t)=d$. В силу свойства (ii), $\sim_d$ есть отношение эквивалентности. Поскольку множества $\mathrm{Y}\times \mathrm{R}$ и R равномощны, то найдется семейство функций $\{h_d : \mathrm{Y}\times \mathrm{R}\to \mathrm{R},\ d\in \mathrm{D}\}$, такое, что

$$(y,t)\sim_d (y',t') \Leftrightarrow h_d(y,t)=h_d(y',t'). \ ■$$

Утверждение 4. Характеризация индекса I_4.

Если отношение доходности $\succeq$ удовлетворяет свойствам (i), (ii) и (iii), то найдутся непрерывная функция полезности u и семейство функций $\{ g_d : u(\mathrm{X}) \to \mathrm{R}, \ d \in \mathrm{D} \subseteq \mathrm{R} \}$ такие, что функция, сопоставляющая элементу $(x,t;x',t') \in \mathrm{V}$ единственное решение d уравнения

$$g_d\big(u(x)\big) + \varphi(t) = g_d\big(u(x')\big) + \varphi(t'), \tag{21}$$

если $u(x) \neq u(x')$, и фиксированный элемент d_0 множества D, в противном случае, является индексом доходности для $\succeq$. В частности, если (iii) справедливо с тождественным преобразованием φ, то (21) характеризует индекс I_4 с $\delta_d = \mathrm{sgn}|d - d_0|$.

Доказательство.

Пусть $\succeq_\varphi$ – отношение, построенное по правилу (16), u и $\{ h_d, \ d \in \mathrm{D} \}$ – соответствующие ему функция полезности и семейство функций из Утверждения 3. Введем функции $\bar{h}_d(t) = h_d(y_0, t)$, $d \in \mathrm{D}$, где y_0 – фиксированный элемент $\mathrm{Y} = u(\mathrm{X})$. Обозначим $\mathrm{A} = \{\mathrm{D} \setminus \{d_0\}\} \times \{\mathrm{Y} \setminus \{y_0\}\} \times \mathrm{R}$, где d_0 – единственный (в силу (i)) элемент D, такой, что $\bar{h}_{d_0}(\cdot) \equiv const$. В силу (i) для любых $(d, y, t) \in \mathrm{A}$ существует единственное t', такое, что $h_d(y,t) = \bar{h}_d(t')$. Положим $f_d(y,t) = \begin{cases} \bar{h}_d^{-1} \circ h_d(y,t), & \text{если } (d,y,t) \in \mathrm{A} \\ t, & \text{если } y = y_0 \end{cases}$, $d \neq d_0$. Функция f корректно определена и удовлетворяет тождеству $f_d(y, t+\tau) = f_d(y,t) + \tau$ (в силу (iii)). Легко видеть, что функция, сопоставляющая вложению $(x,t;x',t')$ единственное решение d уравнения $f_d\big(u(x),t\big) = f_d\big(u(x'),t'\big)$, если $u(x) \neq u(x')$, и число d_0, в противном случае, является индексом доходности для $\succeq_\varphi$. Положим $g_d(y) = f_d(y,0)$, $d \neq d_0$, тогда $f_d(y,t) = f_d(y,0) + t = g_d(y) + t$. ■

6. Монетарные индексы доходности

Свойства раздела 5 не предполагали наличия какой-либо структуры на множестве X. Вместе с тем интерпретация элементов множества V как финансовых вложений неявно подразумевает, что на V определены некоторые операции: объединение финансовых вложений, изменение масштаба вложения (например, под действием кредитного плеча) и т.п.

В данном разделе предполагается, что X – выпуклый конус в вещественном линейном нормированном пространстве ($\mathrm{X} + \mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}$ и $\lambda\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X} \ \ \forall \lambda > 0$). Это позволяет корректным образом определить на V операцию изменения масштаба проекта $(x,t;x',t') \mapsto (\lambda x, t; \lambda x', t')$, $\lambda > 0$ и операцию объединения синхронных (независимых) финансовых вложений, сопоставляющую вложениям $(x,t;x',t')$ и $(y,t;y',t')$ вложение $(x+y,t;x'+y',t')$. Отношения доходности и соответствующие им индексы доходности на множестве X указанного вида будем называть *монетарными*. Следующие свойства монетарного отношения доходности представляются нам разумными.

Ненасыщаемость:

(v) A) $x+y \succ_0 x$; B) для любых $v,(y,\tau;y',\tau') \in \mathrm{V}$ найдутся вектора y_1, y_2, y_1', y_2' из X, такие, что $(y_1,\tau;y',\tau') \succeq v \succeq (y_2,\tau;y',\tau')$ и $(y,\tau;y_1',\tau') \succeq v \succeq (y,\tau;y_2',\tau')$.

Независимость от масштаба:

(vi) $(x,t;x',t') \sim (\lambda x,t;\lambda x',t')$ для любого $\lambda \in \mathrm{R}_+$.

Инвариантность к одновременной реализации:

(vii) $(x,t;x',t') \sim (y,t;y',t') \Rightarrow (x,t;x',t') \sim (x+y,t;x'+y',t')$.

Свойство (v) постулирует монотонную зависимость доходности от характеристик финансового вложения. Так, согласно пункту A, вложения с большей отдачей предпочтительнее для инвестора. В силу пункта B вложение может быть сделано сколь угодно привлекательным/малопривлекательным для инвестора изменением объемов инвестируемых и получаемых средств (outcome sensitivity [20, аксиома (A2)]).

В силу свойства (vi) доходность не зависит от масштаба финансового вложения и, как следствие, соответствующий индекс доходности является относительным показателем. Большинство используемых на практике показателей доходности удовлетворяет данному свойству. Заметим, что свойство (vi) неявно предполагает гомотетичность предпочтений инвестора. Действительно, если $x' \succeq_0 y'$, то из (vi) и A3 следует $(\lambda x,t;\lambda x',t') \sim (x,t;x',t') \succeq (x,t;y',t') \sim (\lambda x,t;\lambda y',t')$, откуда $\lambda x' \succeq_0 \lambda y'$.

Наконец, согласно свойству (vii), если два синхронных вложения имеют одну и ту же доходность, то такой же будет и доходность объединенного вложения. Свойства (ii) и (vii) декомпозируют на составляющие так называемую аксиому инвариантности к одновременной реализации, предложенную в работе [3]. Согласно этой аксиоме, совместная реализация финансовых вложений с одинаковой доходностью имеет ту же доходность. Данная аксиома (совместно с близкой к ней – аксиомой усредняемости [3]) имеет принципиальное значение, ибо позволяет рассматривать каждое из финансовых вложений независимо от остальных и децентрализовать процедуру принятия решений по различным вложениям [3].

Утверждение 5.

Пусть $\succeq$ – монетарное отношение доходности. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\succeq$ удовлетворяет свойствам (v) (пункт A) и (vi);

(b) найдутся непрерывная монотонная (в смысле свойства (v) (пункт A)) положительно однородная функция полезности $u : \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ и непрерывная строго монотонно возрастающая по первому аргументу функция $h : \{(y;t,t') \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^2 : t < t'\} \to \mathrm{R}$, такие, что

$$I_5(v) = h\left(\frac{u(x')}{u(x)}; t, t'\right) \tag{22}$$

является индексом доходности для $\succeq$.

Утверждение остается справедливым с непрерывной монотонной положительно-однородной и аддитивной функцией полезности, если свойство (vi) в (a) заменить на (vii).[4]

Доказательство.

Пусть u и $(x,t;x',t') \mapsto g(u(x),t;u(x'),t')$ – числовые представления отношений $\succeq_0$ и $\succeq$ соответственно (Предложение 1). Покажем, что u может быть выбрано таким образом, что

$$u(\mathrm{X}) = \mathrm{R}_+ \text{ и } u(\lambda x_0) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathrm{R}_+, \tag{23}$$

где x_0 – фиксированный элемент X. Для этого достаточно установить, что функция $\lambda \mapsto u(\lambda x_0)$ строго монотонно возрастает и для любого $x \in \mathrm{X}$ найдется единственное $\lambda \in \mathrm{R}_+$, такое, что $u(\lambda x_0) = u(x)$. Действительно, из свойств A2 и (v) (пункт A) следует, что функция $\lambda \mapsto u(\lambda x_0)$ строго монотонно возрастает. Предположим, что существует $x \in \mathrm{X}$, такой, что $u(x) < u(\lambda x_0) \quad \forall \lambda \in \mathrm{R}_+$ (случай противоположного неравенства разбирается аналогично). Тогда $u(2x) < u(\lambda x_0) < u(\lambda x_0 + (1-\lambda)x)$, $\lambda \in (0,1)$, где первое неравенство следует из (vi), второе – из (v) (пункт A). Переходя в данном неравенстве к пределу $\lambda \downarrow 0$, и пользуясь непрерывностью u, приходим к противоречию со свойством (v) (пункт A): $u(2x) \le u(x)$.

Далее предполагается, что u удовлетворяет свойствам (23). Тогда, в силу (vi),

$$\begin{aligned} &g(u(x),t;u(x'),t') = g(u(u(x)x_0),t;u(u(x')x_0),t') = \\ &= g(u(\lambda u(x)x_0),t;u(\lambda u(x')x_0),t') = g(\lambda u(x),t;\lambda u(x'),t') \end{aligned} \tag{24}$$

для любого $\lambda \in \mathrm{R}_+$. Полагая в (24) $\lambda = 1/u(x) > 0$, получаем (22) с $h(y;t,t') = g(1,t;y,t')$. Из (vi) и (22) следует

$$u(x')/u(x) = u(\lambda x')/u(\lambda x) \tag{25}$$

[4] Таким образом, u может рассматриваться как сужение линейного непрерывного функционала на множество X.

для любых $x, x' \in \mathrm{X}$ и $\lambda \in \mathrm{R}_+$. Полагая в (25) $x' = x_0$, убеждаемся, что u положительно однородна. В обратную сторону утверждение очевидно.

Пусть теперь справедливы свойства (v) (пункт A) и (vii). Из (vii) с $y = x$, $y' = x'$ следует $(x,t;x',t') \sim (2x,t;2x',t')$. По индукции,

$$(x,t;x',t') \sim (nx,t;nx',t') \text{ для любого натурального } n. \tag{26}$$

Аналогичным образом убеждаемся, что

$$(x,t;x',t') \sim (x/m,t;x'/m,t') \text{ для любого натурального } m. \tag{27}$$

Объединяя (26) и (27), имеем

$$(x,t;x',t') \sim (\lambda x,t;\lambda x',t') \tag{28}$$

для любого положительного рационального λ. Поскольку множество положительных рациональных чисел всюду плотно в R_+, в силу свойства A2, (28) справедливо также для любого $\lambda \in \mathrm{R}_+$. Таким образом, выполнено (vi) и индекс доходности представим в виде (22). В силу (vii),

$$\frac{u(x')}{u(x)} = \frac{u(y')}{u(y)} \Rightarrow \frac{u(x')}{u(x)} = \frac{u(x'+y')}{u(x+y)}. \tag{29}$$

Полагая в (29) $x' = u(x)x_0$, $y' = u(y)x_0$, имеем

$$u(x+y) = u(x) + u(y). \tag{30}$$

Таким образом, u – непрерывный монотонный (в смысле свойства (v) (пункт A)) положительно однородный и аддитивный функционал. ■

Интерпретации индекса I_5 (22) упрощается, если наряду с пунктом A свойства (v) справедлив также и пункт B. В этом случае $h(\mathrm{R}_+;t,t') = I(\mathrm{V})$ для любых фиксированных $t < t'$ и рассматриваемому отношению доходности соответствует семейство межвременных предпочтений вида

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow u(x') \le f_d(t,t')u(x),$$

где $f_\bullet(t,t')$ – функция обратная к $h(\cdot;t,t')$ при $t < t'$, $f_d(t,t) = 1$ и $f_d(t,t') = 1/f_d(t',t)$ при $t > t'$. Элементы данного семейства принадлежат классу отношений межвременного предпочтения с относительным дисконтированием (relative discounting) [20, §3.1], при этом число $f_d(t,t')$ интерпретируется как относительный коэффициент дисконтирования.

Утверждение 6.

Если монетарное отношение доходности $\succeq$ удовлетворяет свойствам (ii), (v) и (vi), то найдутся непрерывная монотонная положительно однородная функция полезности $u: \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ и семейство функций $\{ f_d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+ ,\ d \in \mathrm{D} \}$, такие, что функция $I_6 : \mathrm{V} \to \mathrm{R}$, сопоставляющая элементу $v \in \mathrm{V}$ единственное решение d уравнения

$$u(x) f_d(t) = u(x') f_d(t'), \tag{31}$$

является индексом доходности для $\succeq$.

Утверждение остается справедливым с непрерывной монотонной положительно-однородной и аддитивной функцией полезности, если свойство (vi) заменить на (vii).

Доказательство.

Пусть $\{ h_d ,\ d \in \mathrm{D} \}$ – семейство функций из Утверждения 3, u – положительно однородная функция полезности (Утверждение 5). Введем функцию $\bar{h}_d(\lambda) = h_d(\lambda, t_0)$, где t_0 – фиксированный момент времени. В силу (v) для любых d, x и t существует единственное $\lambda \in \mathrm{R}_+$, такое, что $h_d\big(u(x), t\big) = h_d\big(u(\lambda x_0), t_0\big) = \bar{h}_d(\lambda)$. Положим $g_d(\lambda, t) = \bar{h}_d^{-1} \circ h_d(\lambda, t)$. Функция g корректно определена, положительно однородна по первому аргументу (в силу (vi)), при этом функция, сопоставляющая вложению $(x, t; x', t')$ единственное решение d уравнения $g_d\big(u(x), t\big) = g_d\big(u(x'), t'\big)$ также является индексом доходности для $\succeq$. Положим $f_d(t) = g_d(1, t)$, тогда $g_d(\lambda, t) = \lambda g_d(1, t) = \lambda f_d(t)$. ■

Из доказательства Утверждения 6 следует, что семейство функций $\{ f_d ,\ d \in \mathrm{D} \}$ может быть выбрано таким образом, что $f_\bullet(t_0) \equiv 1$, где t_0 – произвольный фиксированный момент времени. При такой нормировке число $f_d(t)$ естественно интерпретировать как коэффициент дисконтирования, соответствующий моменту времени t и норме дисконта d (приведение осуществляется к моменту времени t_0). Индекс доходности (31) соответствует семейству межвременных отношений типа дисконтированной полезности общего вида (multiplicative discounting model) [13, §4; 20, §3.2].

Следствие 1.

Пусть $\succeq$ – монетарное отношение доходности. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\succeq$ удовлетворяет свойствам (i), (iv), (v) (пункт A) и (vi);

(b) найдутся непрерывная монотонная положительно однородная функция полезности $u: \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ и непрерывная функция $g: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$, $g(1) = 0$, такие, что функция

$$I_7(v) = \frac{g\left(\dfrac{u(x')}{u(x)}\right)}{\varphi(t') - \varphi(t)}$$

является индексом доходности для $\succeq$.

Утверждение остается справедливым с непрерывной монотонной положительно-однородной и аддитивной функцией полезности, если свойство (vi) в (a) заменить на (vii).

Доказательство.

Следует из Утверждений 1 и 5. ■

Если в пункте (a) Следствия 1 наряду с пунктом A свойства (v) справедлив также и пункт B, то функция g действует на R и получаемому отношению доходности соответствует семейство межвременных предпочтений вида

$$(x,t) \trianglerighteq_d (x',t') \Leftrightarrow u(x') \le f\big(d\big(\varphi(t') - \varphi(t)\big)\big)u(x), \tag{32}$$

где f – функция, обратная к g. При $\varphi(t) = t$ элементы данного семейства принадлежат классу стационарных отношений межвременного предпочтения [20, §3.3]. Функция f (discount fraction) в (32) задает метод дисконтирования платежей. В литературе по межвременному выбору можно встретить следующие примеры выбора функций f и φ: $f(\tau) = e^{\tau}$ и $\varphi(t) = t$ (экспоненциальное дисконтирование); $f(\tau) = \exp(|\tau|^{\alpha} \operatorname{sgn} \tau)$, $\alpha \in (0,1)$ и $\varphi(t) = t$ [24]; $f(\tau) = (1 + |\tau|^{\alpha})^{\operatorname{sgn}\tau}$, $\alpha \in (0,1]$ и $\varphi(t) = t$ [24]; $f(\tau) = (1 + |\tau|^{\alpha})^{\beta \operatorname{sgn}\tau}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$ и $\varphi(t) = |t|^{\gamma} \operatorname{sgn} t$, $\gamma \in (0,1)$ [25].

Утверждение 7.

Пусть $\succeq$ – монетарное отношение доходности. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\succeq$ удовлетворяет свойствам (ii), (iii), (v) (пункт A) и (vi);

(b) найдется непрерывная монотонная положительно однородная функция полезности $u : \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$, такая, что функция

$$I_8(v) = \frac{\ln\left(\dfrac{u(x')}{u(x)}\right)}{\varphi(t') - \varphi(t)}$$

является индексом доходности для отношения $\succeq$.

Утверждение остается справедливым с непрерывной монотонной положительно-однородной и аддитивной функцией полезности, если свойство (vi) в (a) заменить на (vii).

Доказательство.

Пусть $\succeq$ удовлетворяет свойствам (ii), (iii), (v) (пункт A) и (vi). И пусть $\succeq_\varphi$ – отношение, построенное по правилу (16). Из Утверждения 5 и (iii)$_\varphi$ (см. доказательство Предложения 2) следует, что найдутся непрерывная монотонная положительно однородная функция функция полезности $u : \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ и строго монотонно возрастающая по первому аргументу непрерывная функция $h : \mathrm{R}_+^2 \to \mathrm{R}$, такие, что

$$I(x,t;x',t') = h\left(\frac{u(x')}{u(x)}, t'-t\right) \tag{33}$$

является индексом доходности для $\succeq_\varphi$.

Из (33) и (ii) с $u(x')/u(x) = u(x'')/u(x') = \lambda$, $t'-t = t''-t' = \tau$ следует $h(\lambda,\tau) = h(\lambda^2, 2\tau)$. По индукции устанавливается, что

$$h(\lambda,\tau) = h(\lambda^n, n\tau) \text{ для любого натурального } n. \tag{34}$$

Аналогичным образом убеждаемся, что

$$h(\lambda,\tau) = h(\lambda^{1/m}, \tau/m) \text{ для любого натурального } m. \tag{35}$$

Объединяя (34) и (35), имеем

$$h(\lambda,\tau) = h(\lambda^r, r\tau) \tag{36}$$

для любого положительного рационального r. Поскольку множество положительных рациональных чисел всюду плотно в R_+, в силу непрерывности h, (36) справедливо также для любого $r \in \mathrm{R}_+$. Пользуясь (33) и (36) с $r = 1/\tau$, имеем

$$I(x,t;x',t') = h\left(\frac{u(x')}{u(x)}, t'-t\right) = h\left(\left(\frac{u(x')}{u(x)}\right)^{\frac{1}{t'-t}}, 1\right).$$

Поскольку h строго монотонно возрастает по первому аргументу, I_8 является индексом доходности для $\succeq$. В обратную сторону утверждение очевидно. ■

Согласно Предложению 2, замена свойства (iii) на (i) и (iv) в Утверждении 7 позволяет получить альтернативную характеризацию индекса I_8. Заметим также, что для заданного отношения $\succeq_0$ Утверждение 7 характеризует единственное отношение доходности (в отличие от всех полученных выше результатов, где характеризованы определенные семейства отношений доходности). Действительно, положительно однородная функция полезности для $\succeq_0$ определена с точностью до множителя, который сокращается в числителе индекса I_8. В частности, если $\mathrm{X} = \mathrm{R}_+$ с естественным порядком $\succeq_0$ и в пункте (a) Утверждения 7 свойство (iii) справедливо с тождественным преобразованием φ, то $I_8 = I_0$.

Пример 1. Обобщение индекса I_0 на случай интервальной неопределенности в отношении инвестируемой и возвращаемой сумм

Для описания финансового вложения в условиях интервальной неопределенности рассмотрим выпуклый конус $\mathrm{X}=\{(x_1,x_2)\in \mathrm{R}_+^2 : x_1 \le x_2\}$ в линейном нормированном пространстве R^2 с нормой $\|x\|=|x_1|+|x_2|$ и стандартным образом определенными операциями сложения и умножения на скаляр. Элемент x множества X будем интерпретировать как нижнюю и верхнюю границы интервала $[x_1,x_2]$, которому принадлежит объем инвестируемых/возвращаемых средств. В рамках данной интерпретации сложению в X соответствует операция сложения интервалов в интервальной арифметике. При этом введенная норма порождает на соответствующем множестве интервалов метрику симметрической разности множеств.

Пусть $\succeq$ – монетарное отношение доходности, удовлетворяющее свойствам (ii), (v) (пункт А), (vi) и (iii) с тождественным преобразованием φ. Тогда найдется непрерывная строго монотонно возрастающая (в смысле свойства (v), пункт А) положительно однородная функция $u:\mathrm{X}\to\mathrm{R}_+$, такая, что

$$I(v)=\frac{\ln\left(\dfrac{u(x')}{u(x)}\right)}{t'-t}$$

является индексом доходности (Утверждение 7). Заметим, что из свойств u следует, что $\min\limits_{i=1,2} x_i'/x_i \le u(x')\big/u(x) \le \max\limits_{i=1,2} x_i'/x_i$. Таким образом, $I(v)$ – это среднее по Коши индексов $I_0(x_i,t;x_i',t')$, $i=1,2$:

$$\min_{i=1,2} I_0(x_i,t;x_i',t') \le I(v) \le \max_{i=1,2} I_0(x_i,t;x_i',t')\,.$$

В частности, если вместо (vi) выполнено свойство (vii), то

$$I(v)=\frac{\ln\left(\dfrac{wx_1'+(1-w)x_2'}{wx_1+(1-w)x_2}\right)}{t'-t} \tag{37}$$

для некоторой константы $w\in[0,1]$. (37) соответствует индексу I_0 с объемами инвестируемых и получаемых средств равными арифметическому взвешенному среднему границ интервалов.

7. Замечание об индексах доходности в условиях вероятностной неопределенности

Полученные выше результаты оказываются полезными для оценки доходности финансовых вложений в условиях вероятностной неопределенности. Действительно, пусть $\mathfrak{B}(\mathrm{V})$ – сигма-алгебра борелевских подмножеств пространства финансовых вложений $(\mathrm{V}, d_{\mathrm{V}})$, $\tilde{\mathrm{V}}$ – семейство вероятностных мер на $(\mathrm{V}, \mathfrak{B}(\mathrm{V}))$. Поскольку $(\mathrm{V}, d_{\mathrm{V}})$ сепарабельно, то метрическое пространство $(\tilde{\mathrm{V}}, d_{\tilde{\mathrm{V}}})$, где $d_{\tilde{\mathrm{V}}}$ – метрика Леви–Прохорова, также сепарабельно и последовательность $\{\tilde{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$ вероятностных мер из $\tilde{\mathrm{V}}$ сходится слабо к мере $\tilde{v} \in \tilde{\mathrm{V}}$ тогда и только тогда, когда $d_{\tilde{\mathrm{V}}}(\tilde{v}_k, \tilde{v}) \to 0$, $k \to \infty$ [5]. Таким образом, результаты раздела 5 могут быть использованы для оценки доходности финансовых вложений в условиях вероятностной неопределенности, если под непрерывностью $\succeq$ понимать непрерывность относительно слабой сходимости вероятностных мер: если последовательности $\{\tilde{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\tilde{v}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ вероятностных мер из $\tilde{\mathrm{V}}$ сходятся слабо, соответственно, к мерам $\tilde{v}$ и $\tilde{v}'$, причем $\tilde{v}_k \succeq \tilde{v}_k$ для всех k, то $\tilde{v} \succeq \tilde{v}'$.

В качестве примера реализации данного наблюдения покажем (следуя идее, предложенной в [3, §6]), что при некоторых технических предположениях индексы доходности в условиях вероятностной неопределенности имеют вид монетарных индексов доходности с $\mathrm{X} = \mathrm{R}_+$ и объемами инвестируемых и получаемых средств, равными математическим ожиданиям соответствующих случайных величин.

Пример 2. Обобщение индекса I_0 на случай вероятностной неопределенности в отношении инвестируемой и возвращаемой сумм

Пусть $(\mathrm{X}, d_{\mathrm{X}})$, где d_{X} – метрика Леви–Прохорова, – пространство всех вероятностных распределений на $(\mathrm{R}_+, \mathfrak{B}(\mathrm{R}_+))$ с конечными первыми моментами, таких, что при всех $s \geq 0$ справедливо неравенство $\mathbf{E}e^{-sX} \leq (1 + s\mathbf{E}X)^{-1}$ (здесь и далее используется следующее соглашение об обозначениях: X – это случайная величина на вероятностном пространстве $\langle \mathrm{R}_+, \mathfrak{B}(\mathrm{R}_+), \mathrm{P} \rangle$, индуцирующая вероятностную меру $x \in \mathrm{X}$). Пусть $\succeq$ – отношение доходности, удовлетворяющее свойствам (v) (пункт А), (vii) и (vi), где под «+» понимается операция свертки вероятностных распределений, под λx ($\lambda > 0$) – вероятностная мера, индуцируемая случайной величиной λX. Покажем, что найдется непрерывная строго монотонно возрастающая по первому аргументу функция $h : \{(y; t, t') \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^2 : t < t'\} \to \mathrm{R}$, такая, что

$$I'_5(v) = h\left(\frac{\mathbf{E}X'}{\mathbf{E}X};t,t'\right) \tag{38}$$

является индексом доходности для $\succeq$.

Прежде всего заметим, что X замкнуто относительно операций свертки вероятностных распределений и скалирования $x \mapsto \lambda x$, $\lambda > 0$, и функционал $\mathbf{E}$ непрерывен в X [8]. Произвольно выбранному $v = (x,t;x',t') \in \mathrm{V}$ сопоставим последовательности

$$X_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i\,,\ X'_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y'_i\,,\ v_k = (x_k,t;x'_k,t')\,,\ k = 1,2,...,$$

где Y_i, Y'_i, $i = 1,2,...$ – независимые копии случайных величин X, X'. По закону больших чисел последовательности $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{X'_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся по вероятности (а, следовательно, и по распределению) к $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{E}X'$, соответственно. В силу (vi) и (vii) $v \sim v_k$ для всех k. Справедливость представления (38) теперь следует из А2 и Утверждения 5.

Таким образом, для получения разумных обобщений монетарных индексов доходности с $\mathrm{X} = \mathrm{R}_+$ на случайные финансовые вложения достаточно в качестве объемов инвестируемых и получаемых средств использовать математические ожидания соответствующих случайных величин.

8. Заключение

В работе предложены характеризации индекса I_0 (1) и нескольких его обобщений на базе аксиом, отражающих основные свойства, ожидаемые от индекса доходности. Заметим, что различные показатели доходности традиционно используются и для оценки стоимости (цены) привлечения заемных средств. Поскольку свойства (i)–(vii) сохраняют экономическое содержание, если элементы множества V интерпретировать как финансовые обязательства (получение суммы x в момент времени t и возврат суммы x' в момент времени $t' > t$), а $\succeq$ – как отношение стоимости привлечения заемных средств, то полученные результаты также характеризуют $I_0 - I_8$ как индексы стоимости привлечения заемных средств. Мы надеемся, что эти результаты с одной стороны послужат оправданием в пользу применения данных индексов для оценки доходности финансовых операций, с другой – помогут четко очертить границы их применимости.

9. Литература

1. *Беленький В.З.* О норме доходности инвестиционного проекта // Экономика и математические методы. 2005. Т. 41. №1. С. 3–19.

2. *Бронштейн Е.М., Скотников Д.А.* Предельная доходность финансовых операций // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII. №4(24). С. 7–17.

3. *Виленский П.Л., Смоляк С.А.* Показатель внутренней нормы доходности проекта и его модификации. Препринт # WP/98/060. М.: ЦЭМИ РАН, 1998.

4. *Воронцовский А.В.* Инвестиции и финансирование: методы оценки и обоснования. СПб: Издательство СПбГУ, 2003.

5. *Прохоров Ю.В.* Сходимость случайный процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применение. 1956. Том 1. №2. С. 177–238.

6. *Ущев Ф.А.* Асимптотические свойства оптимальных траекторий в агрегированных моделях экономической динамики. Диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук. СПб: СПбГУЭиФ, 2006.

7. *Arrow K.J., Levhari D.* Uniqueness of the internal rate of return with variable life of investment // The Economic Journal. 1969. Vol. 79. Issue 315. P. 560–566.

8. *Basu S.K., Mitra M.* The class of life distributions that are Laplace order dominated by the exponential law and its ramifications // In A.P. Basu, S.K. Basu, S. Mukhopadhyay (eds.). Frontiers in Reliability. World Scientific, 1998.

9. *Bleichrodt H., Rohde K.I.M., Wakker P.P.* Non-hyperbolic time-inconsistency // Games and Economic Behavior. 2009. Vol. 66. Issue 1. P. 27–38.

10. *Castillo E., Iglesias A., Ruiz-Cobo R.* Functional equations in applied sciences. Amsterdam: Elsevier, 2005.

11. *Debreu G.* Representation of a preference ordering by a numerical function // In R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.L. Davis (eds.). Decision Processes. New York: Wiley, 1954. P. 159–165.

12. *Eichhorn W.* Functional equations in economics. London: Addison-Wesley, 1978.

13. *Fishburn P.C., Rubinstein A.* Time preference // International Economic Review. 1982. Vol. 23. Issue 3. P. 677–694.

14. *Gray Jr.K.B., Dewar R.B.K.* Axiomatic characterization of the time-weighted rate of return // Management Science. 1971. Vol. 18. Issue 2. P. B32–B35.

15. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory: an analysis of decision under risk // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 313–327.

16. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in intertemporal choice: evidence and an interpretation // The Quarterly Journal of Economics. 1992. Vol. 107. P. 573–597.

17. *Luce R.D.* Utility of gains and losses: measurement-theoretical and experimental approaches. Mahwah: Erlbaum, 2000.

18. *Moszner Z.* Une généralisation d’un résultat de J. Aczél et M. Hosszú sur l’équation de translation // Aequationes Mathematicae. 1989. Vol. 37. P. 267–278.

19. *Ng C.T.* Inverse systems and the translation equation on topological spaces // Acta Mathematica Academiae Seientiarum Hungaricae. 1978. Vol. 31. Issues 3–4. P. 227–232.

20. *Ok E.A., Masatlioglu Y.* A general theory of time preferences. Mimeo. New York University, 2003. Опубликовано с небольшими изменениями: *Ok E.A., Masatlioglu Y.* A theory of (relative) discounting // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 137. Issue 1. P. 214–245.

21. *Osborne M.J.* A resolution to the NPV–IRR debate? // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2010. Vol. 50. Issue 2. P. 234–239.

22. *Promislow S.D.* Classification of usurious loans // Proceedings of International AFIR Colloquium. 1997. P. 739–759.

23. *Promislow S.D., Spring D.* Postulates for the internal rate of return of an investment project // Journal of Mathematical Economics. 1996. Vol. 26. P. 325–361.

24. *Read D.* Is time-discounting hyperbolic or subadditive? // Journal of Risk and Uncertainty. 2001. Vol. 23. Issue 1. P. 5–32.

25. *Scholten M., Read D.* Discounting by intervals: a generalized model of intertemporal choice // Management Science. 2006. Vol. 52. Issue 9. P. 1424–1436.