М. В. Соколов
M. V. Sokolov

ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

MEANINGFUL PREFERENCE RELATIONS ON A SET OF SIMPLE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Аннотация

Систематизировано несколько известных, а также получен ряд новых результатов, посвященных характеризациям отношений предпочтения на множестве простых вероятностных распределений, инвариантных относительно допустимых преобразований шкалы измерения. Характеризации даны в рамках нескольких наиболее часто используемых классов предпочтений (исчислимых, Неймана-Моргенштерна, нетранзитивных и других) для типов шкал, представляющих наибольший практический интерес (порядковой шкалы, шкалы интервалов, шкалы отношений и изоморфных им шкал).

Abstract

The paper considers the problem of characterization of meaningful preference relations on a set of simple probability distributions in a variety of common cases, including ordinal representability, cardinal representability (expected utility), intransitivity of preferences, etc. A meaningful preference relation is defined as a relation whose underlying preference ordering is independent of admissible transformations of measurement scales on which the input variables are measured. The task is reduced to solving certain functional equations. Their solutions are obtained in the cases of ordinal, interval, and ratio scales.

УДК 519.812.2

Соколов Михаил Владимирович – канд. экон. наук, ст. преподаватель кафедры экономической кибернетики. Область научных интересов: теория полезности; характеризационные задачи в экономической теории. Автор 10 научных работ.

Введение

Теория полезности представляет собой один из традиционных методов описания процесса принятия рациональных экономических решений в условиях вероятностной неопределенности. При ее применении типичной является проблема выбора конкретного функционального вида индикатора отношения предпочтения (функции полезности). Допускаемое теорией разнообразие функциональных форм зачастую ведет к произволу в использовании тех или иных видов функций. Непосредственным следствием последнего является снижение теоретической ценности тех моделей, выводы которых оказываются неустойчивыми к незначительным изменениям предпосылок относительно соответствующей системы предпочтений.

В качестве возможных подходов к решению данной проблемы упомянем следующие. Во-первых, ориентирование на получение результатов качественного характера, не зависящих от выбора конкретного вида функции полезности. Иллюстрацией такого подхода может служить классическая теорема о взаимных фондах (см., например, [11]), качественные выводы которой справедливы для широкого класса функций полезности. Во-вторых, дальнейшее сужение допустимого класса функций полезности до множества «приемлемых» (с той или иной точки зрения) функций, удовлетворяющих некоторым желаемым требованиям. В качестве таковых могут фигурировать требования устойчивости модельных выводов к изменению некоторых наименее жестких предпосылок, наличие определенных естественных свойств, удобство использования, простота вида окончательных результатов и т.п. Основным аппаратом исследования при таком подходе являются различного рода характеризации.

Одну из определяющих ролей в рамках второго подхода, на наш взгляд, способна сыграть теория измерений [1, глава 3; 14], призывающая отказаться от использования тех методов анализа данных, выводы которых оказываются неустойчивыми к выбору единиц измерения фигурирующих в них переменных. Свою актуальность данное требование (называемое требованием «адекватности») приобретает в связи с тем, что выбор той или иной шкалы измерения переменных сопряжен с известной долей субъективизма, и у исследователя появляется возможность манипулировать результатами анализа, если его выводы оказываются неустойчивыми к этому выбору. В литературе данный принцип зачастую формулируется как требование инвариантности результатов анализа относительно некоторого семейства преобразований входящих переменных (обычно – группы допустимых преобразований соответствующей шкалы измерения) [1, глава 3; 14, глава 22]. Так, одно из неформальных определений понятия «адекватности» может быть следующим [23, с. 59]: высказывание относительно некоторых переменных называют «*адекватным*» (meaningful), если его справедливость не зависит от выбора допустимых преобразований шкал, в которых измеряются фигурирующие в нем переменные.

Отметим, что понятие «адекватности» не связано с истинностью лежащего в его основе утверждения. Так, высказывание «муравей тяжелее слона» неверно при любом выборе единицы измерения веса материального тела, однако, в соответствии с приведенным выше неформальным определением, оно «адекватно».

Как известно [1, с. 103–104; 24], «адекватность» определенных высказываний эквивалентна знанию типа шкалы измерения рассматриваемых переменных. Например, «адекватность» высказывания «полезность блага A не меньше полезности блага B» для любых двух благ из некоторого множества эквивалентна тому, что полезность измеряется, по крайней мере, в порядковой шкале [24, следствие 4.1]. Наличие соответствий подобного рода позволяет свести предположения об «адекватности» определенных высказываний к некоторым функциональным уравнениям и неравенствам, методы решения которых в настоящее время хорошо разработаны (см., например, [4, 24]).

Настоящая статья посвящена характеризациям предпочтений на множестве вероятностных распределений, удовлетворяющих требованию «адекватности» для различных типов шкал измерения. Характеризации даны в рамках нескольких наиболее часто используемых классов предпочтений – исчислимых, Неймана-Моргенштерна, нетранзитивных и других. Показано, что задача может быть сведена к решению определенных функциональных уравнений. Решения этих уравнений получены для шкал измерения, имеющих наибольшее практическое значение – порядковой шкалы, шкалы интервалов, шкалы отношений и изоморфных им шкал. Дабы избежать технических сложностей, связанных с измеримостью функций от случайных величин и существованием используемых в расчетах математических ожиданий, статья ограничивается рассмотрением отношений предпочтения на множестве простых лотерей (дискретных вероятностных распределений с конечным носителем).

1. Определения и обозначения

Ниже приняты следующие соглашения об обозначениях. R и R_+ – множества всех действительных чисел и положительных действительных чисел, соответственно. Жирным шрифтом выделены вектора (например, $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$). Все операции над векторами и множествами выполняются поэлементно (например, $T(\boldsymbol{x}) = (T(x_1), ..., T(x_n))$, где T – одноместная функция). Обозначим:

$$\delta_a(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<a\\ 1, & \text{в противном случае}\end{cases},\quad \delta'_a(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a\\ 1, & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Пусть $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{R}$ – открытый интервал. Семейство $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ возрастающих биекций интервала X на себя называется *группой преобразований*, если оно образует группу относительно операции функциональной композиции $\circ$.

Примерами групп преобразований, имеющих наибольшее практическое значение, являются [14, глава 20]:

– группа преобразований, сопряженных с преобразованиями подобия:

(i) $\mathrm{T}_R^{(u)}(\mathrm{X})=\{T:T(x)=u^{-1}(au(x)),\ a\in\mathrm{R}_+,\ x\in\mathrm{X}\}$,

где u – возрастающая биекция X на R_+;

– группа преобразований, сопряженных с аффинными преобразованиями:

(ii) $\mathrm{T}_I^{(u)}(\mathrm{X})=\{T:T(x)=u^{-1}(au(x)+b),\ a\in\mathrm{R}_+,\ b\in\mathrm{R},\ x\in\mathrm{X}\}$,

где u – возрастающая биекция X на R;

– группа автоморфизмов интервала X:

(iii) $\mathrm{T}_O(\mathrm{X})=\{T:T - \text{возрастающая биекция интервала X на себя}\}$.

Группа преобразований (i) описывает *шкалу отношений*, если u – однородная функция (соответствующую группу преобразований обозначим за $\mathrm{T}_R(\mathrm{R}_+)=\{T:T(x)=ax,\ a\in\mathrm{R}_+,\ x\in\mathrm{R}_+\}$), и изоморфные ей шкалы измерения (разностей, лог-отношений и другие) – в общем случае. Группа преобразований (ii) определяет *шкалу интервалов*, если u – линейная функция, и изоморфные ей шкалы измерения (лог-интервалов и другие) – в общем случае. Наконец, группа преобразований (iii) характеризует *порядковую* (*ординальную*) *шкалу* измерения.

Группу преобразований $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ называют *однородной*, если найдется возрастающая биекция u интервала X на R_+ такая, что $\mathrm{T}_R^{(u)}(\mathrm{X})$ является подгруппой группы $\mathrm{T}(\mathrm{X})$. Свойство однородности интерпретируется как требование, ограничивающее минимальный «размер» («мощность») группы. Очевидно, все рассмотренные выше группы преобразований (i)–(iii) однородны.

Для фиксированного натурального $N\ge 2$ обозначим через $\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$ множество всех вероятностных распределений

$$F_{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})}(x)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}(x)p_i\,, \tag{1}$$

сосредоточенных на не более чем N точках из открытого интервала X. Здесь $n \in \{1,\dots,N\}$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $x_1 \le \dots \le x_n$, $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Любой элемент (1) этого множества будем называть (*простой*) *лотереей с* n *исходами* и обозначать $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$. Частичные суммы вероятностей реализаций исходов лотереи $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$ обозначим через

$p^{(0)} = 0$; $p^{(i)} = p^{(i-1)} + p_i$, $i = 1,\dots,n$.

Отметим, что определение (1) отождествляет лотереи вида $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n,x_n;p_1,\dots,p_{n-1},p_n,p_{n+1})$ и $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n;p_1,\dots,p_{n-1},p_n+p_{n+1})$. Это позволяет, при необходимости, считать, что $n = N$ для любой лотереи $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$.

Пусть на множестве $\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$ задано некоторое отношение предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) (полное транзитивное бинарное отношение). Ниже мы также будем дополнительно предполагать, что:

– ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) *невырождено,* то есть найдутся хотя бы две лотереи $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}') \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$, такие, что $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$, но $(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}') \not\succeq (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$;

– ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) согласовано с *отношением стохастического доминирования первого рода*: $F_{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})}(x) \le F_{(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}')}(x)$ для всех $x \in \mathrm{X}$ влечет $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$.

Определение.

Отношение предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) называется *инвариантным относительно группы преобразований* $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ (для краткости, $\mathrm{T}(\mathrm{X})$-*инвариантным*), если

$(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$ влечет $(T(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{p}) \succeq (T(\boldsymbol{x}'); \boldsymbol{p}')$ для любого $T \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$. (2)

С содержательной точки зрения $\mathrm{T}(\mathrm{X})$-инвариантность отношения предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) означает, что упорядочивание альтернатив, порождаемое ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$), не меняется при преобразованиях $T \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$. Иными словами, для любых двух лотерей $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}') \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$ высказывание «$(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$» является «адекватным» относительно преобразований из группы $\mathrm{T}(\mathrm{X})$. С математической же точки зрения в соотношении (2) утверждается, что для любых векторов вероятностей $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$ множество $\mathrm{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$, построенное по правилу

$(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in \mathrm{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$, замкнуто относительно преобразований из группы $\mathrm{T}(\mathrm{X})$. Например, отношение предпочтения $\mathrm{T}_R(\mathrm{R}_+)$-инвариантно тогда и только тогда, когда для любых $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$ множество $\mathrm{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ образует конус.

Экономическую интерпретацию определения (2) поясним на примере отношения предпочтения, заданного на множестве случайных доходов, измеряемых по шкале отношений ($\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{T}_R(\mathrm{R}_+)$). Для него естественно ожидать, что предпочтение между любыми двумя случайными денежными доходами $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$ и $(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}')$, образованными, скажем, вложением денежных средств в банк под плавающую ставку процента и приобретением на ту же сумму акций с некоторой случайной доходностью, не должно меняться в зависимости от того, инвестирует ли индивид x рублей или $100x$ копеек.

$\mathrm{T}_R(\mathrm{R}_+)$-инвариантность отношения предпочтения может также интерпретироваться как требование независимости предпочтений от валюты в которой номинирован инвестируемый капитал (в предположении о постоянстве соответствующих кросс-курсов).

Альтернативной интерпретацией $\mathrm{T}_R(\mathrm{R}_+)$-инвариантности, имеющей совершенно иное экономическое содержание, может служить независимость предпочтений от размера инвестируемого капитала (т. н. постоянная относительная несклонность к риску [25]).

Требование инвариантности относительно иных групп преобразований допускает близкие интерпретации. В работе [15] также предложена интересная экономическая интерпретация $\mathrm{T}_I^{(u)}(\mathrm{X})$-инвариантности: она эквивалентна существованию кардинальной полезности u, измеряемой по шкале интервалов (см. также пункт (ii) теоремы 1 ниже).

Помимо приведенных выше возможных экономических интерпретаций, инвариантность отношения предпочтения имеет и чисто практические преимущества – возможность формулировки модельных выводов без указания конкретных шкал измерения переменных и использование одних и тех же процедур анализа предпочтений (например, поиска оптимальной альтернативы) независимо от выбора конкретной шкалы измерения.

В заключении раздела отметим, что при построении ряда экономико-математических моделей требование инвариантности, по-видимому, постулируется неявным образом. Действительно, во многих теоретических моделях авторы не конкретизируют размерность экономических переменных (например, «труда», «капитала», «выпуска», «денежного дохода»). В этом случае предположение о том, что на множестве этих переменных задано некоторое отношение предпочтения некорректно, если только последнее не инвариантно относительно соответствующей группы преобразований.

В следующих разделах статьи приведены характеризации отношений предпочтения, инвариантных относительно групп преобразований (i)–(iii), в рамках нескольких наиболее распространенных версий теории полезности – порядковой теории полезности (раздел 2), теории косвенной полезности (раздел 3), полезности, порождаемой функцией потерь (раздел 4), теории взвешенной полезности (раздел 5), ранговой теории полезности (раздел 6), теории «разочарований» (раздел 7) и теории сравнительной полезности (раздел 8).

2. Инвариантные исчислимые отношения предпочтения

Отношение предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ называется *исчислимым*, если существует *индикатор* $U:\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}\to\mathrm{R}$ (определенный с точностью до строго монотонно возрастающего преобразования), такой, что для любых лотерей $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}')\in\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$

$$(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\succeq(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}') \text{ тогда и только тогда, когда } U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\geq U(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}'). \tag{3}$$

Как известно (см., например, [19, §6]), при некоторых условиях регулярности одним из индикаторов исчислимого отношения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ является функционал, сопоставляющий лотерее ее безрисковый эквивалент и представляющий собой некоторое среднее по Коши соответствующей случайной величины. Следующая вспомогательная лемма использует известный результат об инвариантных средних по Коши [1, с. 98; 20, теорема 2.2] и позволяет свести задачу характеризации инвариантных исчислимых отношений предпочтения к решению определенного функционального уравнения.

Лемма 1.

Исчислимое отношение предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ инвариантно относительно однородной группы преобразований $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ тогда и только тогда, когда у $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ найдется индикатор U, удовлетворяющий функциональному уравнению

$$U(T(\boldsymbol{x});\boldsymbol{p})=T\circ U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \text{ для любых } (\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\in\tilde{\mathrm{X}}^{(N)} \text{ и } T\in\mathrm{T}(\mathrm{X}). \tag{4}$$

Из леммы 1, в частности, следует, что фигурирующий в ней индикатор U измеряется в той же шкале измерения, что и исходы лотерей из множества $\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$.

В следующей теореме получены решения функционального уравнения (4) для групп преобразований вида (i)–(iii).

Теорема 1.

Исчислимое отношение предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ инвариантно относительно группы преобразований (i) (соответственно, (ii), (iii)), тогда и только тогда, когда один из его индикаторов имеет вид, соответственно:

(i) $U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = G(u(\boldsymbol{x});\boldsymbol{p})$,

где G – линейно-однородный ($G(a\boldsymbol{y};\boldsymbol{p}) = aG(\boldsymbol{y};\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}_+^n$, $a \in \mathrm{R}_+$) индикатор некоторого отношения предпочтения на множестве $\tilde{\mathrm{R}}_+^{(N)}$;

(ii) $U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = G(u(\boldsymbol{x});\boldsymbol{p})$,

где G – линейно-однородный и трансляционный ($G(a\boldsymbol{y}+b;\boldsymbol{p}) = aG(\boldsymbol{y};\boldsymbol{p}) + b$, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$, $a \in \mathrm{R}_+$, $b \in \mathrm{R}$) индикатор некоторого отношения предпочтения на множестве $\tilde{\mathrm{R}}^{(N)}$;

(iii) $U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\delta_c(p^{(i)}) - \delta_c(p^{(i-1)})\right]x_i$ или $U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\delta'_{c'}(p^{(i)}) - \delta'_{c'}(p^{(i-1)})\right]x_i$, (5)

где $c \in (0,1]$, $c' \in [0,1)$ – произвольные константы.

Отметим, что выражение (5) представляет собой квантиль порядка c (c') вероятностного распределения $F_{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})}$ (в теории риска для нее иногда также используется термин VaR). Таким образом, квантильная теория полезности (quantile utility) [16] является естественной моделью исчислимого отношения предпочтения на множестве случайных величин, измеряемых по ординальной шкале.

Несмотря на абстрактность утверждений теоремы 1 для групп преобразований (i) и (ii), она имеет ряд практически интересных следствий.

Следствие 1.

Если исчислимое отношения предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (ii) с непрерывно дифференцируемыми элементами и один из его индикаторов U дифференцируем по исходам $\boldsymbol{x}$, то (с точностью до строго монотонно возрастающего непрерывно дифференцируемого преобразования)

$$U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n}\left[w(p^{(i)}) - w(p^{(i-1)})\right]u(x_i),\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \quad (6)$$

где функция $w:[0,1] \to [0,1]$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ не убывает.

Для доказательства следствия 1 достаточно воспользоваться пунктом (ii) теоремы 1 и известным результатом о дифференцируемом в нуле решении уравнения линейной однородности [4, предложение 9]. Отметим, что отношения предпочтения, порождаемые индикатором (6), описывают так называемую ранговую теорию полезности (rank-dependent utility) [21].

С теоретической точки зрения особый интерес представляют лотереи с не более, чем двумя исходами ($N = 2$), поскольку при построении теории полезности некоторые авторы зачастую ограничиваются аксиоматизацией лишь бинарного случая, используя в дальнейшем различного рода индуктивные предположения для распространения полученных результатов на общий случай [17].

Следствие 2.

Исчислимое отношение предпочтения на множестве бинарных лотерей $(\tilde{\mathrm{X}}^{(2)},\succeq)$ инвариантно относительно группы преобразований (ii) тогда и только тогда, когда один из индикаторов отношения предпочтения имеет вид

$$U(x_1, x_2; p, 1-p) = w(p)u(x_1) + (1-w(p))u(x_2), \qquad (7)$$

где функция $w:[0,1]\to[0,1]$, $w(0)=0$, $w(1)=1$ не убывает.

Отметим, что отношения предпочтения, порождаемые индикатором (7), описывают бинарный случай так называемой ранговой теории взвешенной полезности (ranked-weighted utility) (см., например, [18]). Таким образом, в бинарном случае ранговая взвешенная полезность является наиболее общей моделью, обеспечивающей существование кардинальной полезности, измеряемой по шкале интервалов. Данный результат согласуется с [15].

3. Инвариантные отношения предпочтения, описываемые теорией косвенной полезности

В соответствии с *теорией косвенной полезности* (implicit utility) [8, 9] один из индикаторов $U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})$ отношения предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)},\succeq)$ определяется как единственное решение x уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i, x) = 0, \ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \qquad (8)$$

где *функция косвенной полезности* $f:\mathrm{X}^2 \to \mathrm{R}$ непрерывна, строго монотонно убывает по второму аргументу и $f(x,x)=0$ для всех $x\in\mathrm{X}$.

Частный случай, когда $f(x,x') = h(x) - h(x')$ для некоторой непрерывной строго монотонно возрастающей одноместной функции h, соответствует индикатору классической теории ожидаемой полезности по Нейману-Моргенштерну.

Индикатор косвенной полезности тесно связан с так называемыми девиационными средними (см., например, [7; 19, §4.3]). Следующая лемма использует известный результат об эквивалентности двух девиационных средних [7] и конкретизирует функциональное уравнение (4) для случая индикатора отношения предпочтения, удовлетворяющего теории косвенной полезности.

Лемма 2.

Исчислимое отношение предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$, один из индикаторов которого определяется соотношением (8), $\mathrm{T}(\mathrm{X})$-инвариантно тогда и только тогда, когда для каждого $T \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$ найдется непрерывная функция $r_T : \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ (зависящая от T), такая, что

$$f\big(T(x), T(x')\big) = r_T(x') f(x, x') \text{ для всех } x, x' \in \mathrm{X}. \tag{9}$$

В следующей теореме получены решения функционального уравнения (9) для групп преобразований вида (i)–(iii).

Теорема 2.

Пусть $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$ – исчислимое отношение предпочтения, один из индикаторов которого определяется соотношением (8).

Если $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$ инвариантно относительно группы преобразований (i), то [7, с. 54] найдутся непрерывные функции $h : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ и $g : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$, такие, что функция $h(\cdot) g\left(\frac{y}{\cdot}\right)$ строго монотонно убывает при каждом фиксированном y, $h(1) = 1$, $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn}(1 - x)$ и

$$f(x, x') = h\big(u(x')\big) g\left(\frac{u(x)}{u(x')}\right).$$

Если $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$ инвариантно относительно группы преобразований (ii), то найдутся такие невозрастающая непрерывная функция $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+$ и константы $a, \lambda > 0$, что

$$f(x, x') = \begin{cases} \big(u(x) - u(x')\big)^{\lambda} h\big(u(x')\big), & \text{если } x \ge x' \\ -a\big(u(x') - u(x)\big)^{\lambda} h\big(u(x')\big), & \text{если } x < x' \end{cases}.$$

$(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$ не инвариантно относительно группы преобразований (iii).

4. Инвариантные отношения предпочтения, порождаемые функцией потерь

С теорией косвенной полезности тесно связан подход [19, §4.2; 22] (preferences based on the loss-minimization), в соответствии с которым один из индикаторов $U(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$ отношения предпочтения $(\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$ определяется как решение x экстремальной задачи:

$$\min_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i, x)\,,\ (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \tag{10}$$

где *функция потерь* $f : \mathrm{X}^2 \to \mathrm{R}_+ \cup \{0\}$ симметрична, $f(x, x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$, $y \le x \le x' \le y'$ влечет $f(x, x') \le f(y, y')$, и для любой лотереи $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$ экстремальная задача (10) имеет в точности одно решение x.

Частный случай (10), когда $f(x, x') = (h(x) - h(x'))^2$ для некоторой непрерывной строго монотонно возрастающей функции h, соответствует индикатору теории ожидаемой полезности.

Следующая вспомогательная лемма конкретизирует функциональное уравнение (4) для случая индикатора отношения предпочтения, определяемого соотношением (10).

Лемма 3.

Пусть ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) – исчислимое отношение предпочтения, один из индикаторов которого определяется соотношением (10) с непрерывно дифференцируемой функцией f, такой, что существуют, не равны нулю и непрерывны смешанные производные $f''_{12}(x, x')$, $f''_{21}(x, x')$, $x \ne x'$, и для любой лотереи $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$ уравнение $\sum_{i=1}^{n} p_i\, f'_2(x_i, x) = 0$ имеет в точности одно решение x. Если ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований $\mathrm{T(X)}$ с непрерывно дифференцируемыми элементами, то для каждого преобразования $T \in \mathrm{T(X)}$ найдется константа $r_T > 0$ (зависящая от T), такая, что

$$f(T(x), T(x')) = r_T\, f(x, x') \text{ для всех } x, x' \in \mathrm{X}. \tag{11}$$

Лемма 3 позволяет доказать следующий результат.

Теорема 3.

Пусть исчислимое отношение предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) удовлетворяет условиям леммы 3.

Если ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (i) с непрерывно дифференцируемыми элементами, то найдется константа λ, такая, что функция $(y, y') \mapsto f(u^{-1}(y), u^{-1}(y'))$ однородна степени λ.

Если ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (ii) с непрерывно дифференцируемыми элементами, то найдутся константы $a > 0$, $\lambda > 1$, такие, что

$$f(x, x') = a\,|u(x) - u(x')|^{\lambda}. \tag{12}$$

($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) не инвариантно относительно группы преобразований (iii).

В заключении раздела отметим два важных предельных случая индикатора U, определяемого соотношением (10) с функцией потерь (12). При $\lambda \downarrow 1$ $U(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$ стремится к медиане вероятностного распределения $F_{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})}$ (безотносительно a и u), а при $\lambda \to +\infty$ – к среднему по Колмогорову крайних исходов (quasi-midrange)

$$U(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) = u^{-1}\left(\frac{u(x_1) + u(x_n)}{2}\right)$$

(безотносительно a и $\boldsymbol{p}$).

5. Инвариантные отношения предпочтения, описываемые теорией взвешенной полезности

Говорят, что исчислимое отношение предпочтения описывается *теорией взвешенной полезности* (weighted utility theory) [6], если найдутся такие *весовая функция* $w : \mathrm{X} \to \mathrm{R}_+$ и неубывающая *функция полезности* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$, что один из индикаторов имеет вид

$$U(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i w(x_i) f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i w(x_i)}, \ (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathrm{X}}^{(N)}. \tag{13}$$

В частности, если весовая функция тождественно равна константе, то (13) соответствует индикатору классической теории ожидаемой полезности.

Теория взвешенной полезности тесно связана с так называемыми обобщенными взвешенными квазиарифметическими средними [3]. Следующая лемма использует известный результат об эквивалентности двух обобщенных взвешенных квазиарифметических средних [3, §2; 6, следствие 1] и конкретизирует функциональное уравнение (4) для случая теории взвешенной полезности.

Лемма 4.

Исчислимое отношение предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$), один из индикаторов которого имеет вид (13), инвариантно относительно однородной группы преобразований $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ тогда и только тогда, когда f строго монотонно возрастает, непрерывна и для каждого преобразования $T \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$ найдется такая 2×2-матрица $\boldsymbol{r}_T = \begin{pmatrix} r_T^{(11)} & r_T^{(12)} \\ r_T^{(21)} & r_T^{(22)} \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{r}_T \neq 0$

(зависящая от T), что вектор-функция $\boldsymbol{f}(x)=\left(w(x)f(x),w(x)\right)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет векторно-матричному функциональному уравнению

$$\boldsymbol{f}\left(T(x)\right)=\boldsymbol{r}_T\ \boldsymbol{f}(x),\ x\in \mathrm{X}. \tag{14}$$

Характеризация линейно-однородных обобщенных взвешенных квазиарифметических средних [3, §5] позволяет получить следующее утверждение о решениях функционального уравнения (14) для групп преобразований вида (i) (и, как следствие, для групп преобразований (ii) и (iii)).

Теорема 4.

Пусть ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$,$\succeq$) – исчислимое отношение предпочтения, один из индикаторов которого имеет вид (13) с непрерывной весовой функцией w.

Если ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$,$\succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (i), то

$$U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i u^{\lambda_1}(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i u^{\lambda_2}(x_i)}\quad \text{или}\quad U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i u^{\lambda}(x_i)\ln u(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i u^{\lambda}(x_i)},$$

где $\lambda_1>\lambda_2$, λ – некоторые константы;

Если ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$,$\succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (ii), то

$$U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{n}p_i u(x_i). \tag{15}$$

($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$,$\succeq$) не инвариантно относительно группы преобразований (iii).

Отметим, что выражение (15) совпадает с индикатором теории ожидаемой полезности по Нейману-Моргенштерну.

6. Инвариантные отношения предпочтения, описываемые ранговой теорией полезности

Ранговая теория полезности (rank-dependent utility) [21, 26] описывает исчислимые отношения предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}$,$\succeq$), один из индикаторов которых имеет вид

$$U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{n}\left[w(p^{(i)})-w(p^{(i-1)})\right]f(x_i),\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\in\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \tag{16}$$

где *функция полезности* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ и *трансформационная функция* $w : [0,1] \to [0,1]$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ не убывают.

В частности, если трансформационная функция линейна, то (16) соответствует индикатору теории ожидаемой полезности по Нейману-Моргенштерну.

Следующая вспомогательная лемма конкретизирует функциональное уравнение (4) для случая ранговой теории полезности.

Лемма 5.

Пусть один из индикаторов исчислимого отношения предпочтения ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) имеет вид (16), при этом $w([0,1]) \neq \{0,1\}$. Данное отношение инвариантно относительно однородной группы преобразований $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ тогда и только тогда, когда f строго монотонно возрастает, непрерывна и для каждого $T \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$ найдутся константы $r_T > 0$, s_T (зависящие от T), такие, что

$$f \circ T(x) = r_T f(x) + s_T \text{ для всех } x \in \mathrm{X}. \tag{17}$$

Для доказательства леммы достаточно воспользоваться известным результатом об эквивалентности двух средних по Колмогорову (см., например, [2, §3.7]).

Характеризации инвариантных средних по Колмогорову [1, с. 127–133; 2, §3.3] позволяют получить следующее утверждение о решениях функционального уравнения (17) для групп преобразований вида (i)–(iii).

Теорема 5.

Пусть ($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) – исчислимое отношение предпочтения, один из индикаторов которого имеет вид (16), при этом $w([0,1]) \neq \{0,1\}$.

($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (i) тогда и только тогда, когда

$$f(x) = au^{\lambda}(x) + b \quad \text{или} \quad f(x) = c \ln u(x) + d,$$

где $a\lambda > 0$, b, $c > 0$, d – некоторые константы.

($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (ii) тогда и только тогда, когда

$$f(x) = au(x) + b,$$

где $a > 0$, b – некоторые константы.

($\tilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq$) не инвариантно относительно группы преобразований (iii).

Отметим, что результаты, приведенные в теореме 5, хорошо известны в рамках теории ожидаемой полезности (см., например, [25]).

Следующее следствие частично дублирует пункт (iii) теоремы 1.

Следствие 3.

Исчислимое отношение предпочтения ($\tilde{X}^{(N)}, \succeq$), один из индикаторов которого имеет вид (16), инвариантно относительно группы преобразований (iii) тогда и только тогда, когда f строго монотонно возрастает и

$w(p) = \delta_c(p)$ или $w(p) = \delta'_{c'}(p)$

для некоторых констант $c \in (0,1]$, $c' \in [0,1)$.

7. Инвариантные отношения предпочтения, описываемые теорией «разочарований»

Согласно одной из версий *теории «разочарований»* (disappointment theory) [5, 12], среди индикаторов отношения предпочтения ($\tilde{X}^{(N)}, \succeq$) найдется такой, который представим в виде

$$U(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[f(x_i) + D\big(f(x_i) - \hat{u}\big)\right],\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \in \tilde{X}^{(N)}, \tag{18}$$

где *функция полезности* f непрерывна и не убывает, а неубывающая функция D, $D(0) = 0$ моделирует «удовлетворение»/«сожаление» о достижении/недостижении некоторого ожидаемого уровня полезности $\hat{u}$.

Отметим, что индикатор (18) представляет собой частный случай индикатора теории ожидаемой полезности с функцией полезности вида $f(\cdot) + D\big(f(\cdot) - \hat{u}\big)$. Используя теорему 5, получаем следующую характеризацию инвариантных отношений предпочтений, порождаемых индикаторами вида (18).

Теорема 6.

Пусть ($\tilde{X}^{(N)}, \succeq$) – исчислимое отношение предпочтения, один из индикаторов которого имеет вид (18).

($\tilde{X}^{(N)}, \succeq$) инвариантно относительно группы преобразований (i) тогда и только тогда, когда

$f(x) = g\big(au^{\lambda}(x) + b\big)$ или $f(x) = g\big(c \ln u(x) + d\big)$; $D(y) = g^{-1}(y + \hat{u}) - y - \hat{u}$, где $a\lambda > 0$, b, $c > 0$, d – некоторые константы, g – непрерывная строго монотонно возрастающая функция, имеющая неподвижную точку $\hat{u}$, и такая, что функция $y \mapsto g^{-1}(y) - y$ не убывает.

$(\tilde{X}^{(N)}, \succeq)$ инвариантно относительно группы преобразований (ii) тогда и только тогда, когда

$f(x) = g\big(au(x) + b\big)$, $D(y) = g^{-1}(y + \hat{u}) - y - \hat{u}$,

где $a > 0$, b – некоторые константы, g – непрерывная строго монотонно возрастающая функция, имеющая неподвижную точку $\hat{u}$, такая, что функция $y \mapsto g^{-1}(y) - y$ не убывает.

$(\tilde{X}^{(N)}, \succeq)$ не инвариантно относительно группы преобразований (iii).

8. Инвариантные отношения предпочтения, описываемые теорией сравнительной полезности

Теория сравнительной полезности (SSB theory, regret theory) [10, 13] является обобщением классической теории ожидаемой полезности на случай нетранзитивности отношения $(\tilde{X}^{(N)}, \succeq)$. В соответствии с одной из ее версий аналогом соотношений (3) и (15) служит

$$\big(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}\big) \succeq \big(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{p}'\big) \text{ тогда и только тогда, когда } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} p_i p'_j f(x_i, x'_j) \geq 0, \qquad (19)$$

где *функция сравнительной полезности* $f : X^2 \to R$ не убывает по первому аргументу, антисимметрична ($f(x; x') = -f(x'; x)$ для всех $x, x' \in X$) и $f(x; x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$.

Отметим, что случай, когда $f(x, x') = h(x) - h(x')$ для некоторой строго монотонно возрастающей функции h, соответствует индикатору теории ожидаемой полезности (15).

Следующая лемма использует результат о единственности представления функции сравнительной полезности [10] и дает аналог функционального уравнения (4) для случая теории сравнительной полезности.

Лемма 6.

Бинарное отношение $(\tilde{X}^{(N)}, \succeq)$, порождаемое соотношением (19), $T(X)$-инвариантно тогда и только тогда, когда для каждого преобразования $T \in T(X)$ найдется константа $r_T > 0$ (зависящая от T), такая, что справедливо функциональное уравнение (11).

Лемма 6 позволяет получить следующий результат.

Теорема 7.

Если бинарное отношение $(\widetilde{\mathrm{X}}^{(N)}, \succeq)$, порождаемое соотношением (19), инвариантно относительно группы преобразований (i) (соответственно, (ii), (iii)), то

(i) $$f(x,x') = \begin{cases} u^{\lambda}(x')g\left(\dfrac{u(x)}{u(x')}\right), & \text{если } x > x' \\ 0, & \text{если } x = x' \\ -u^{\lambda}(x)g\left(\dfrac{u(x')}{u(x)}\right), & \text{если } x < x' \end{cases},$$

где λ – некоторая константа, $g:(1,+\infty)\to \mathrm{R}_+$ – неубывающая функция, такая, что функция $y' \mapsto y'^{\lambda} g\left(\dfrac{y}{y'}\right)$, $y' \in (0,y)$ не возрастает при каждом фиксированном $y \in \mathrm{R}_+$;

(ii) $$f(x,x') = \begin{cases} a\big(u(x)-u(x')\big)^{\lambda}, & \text{если } x > x' \\ 0, & \text{если } x = x' \\ -a\big(u(x')-u(x)\big)^{\lambda}, & \text{если } x < x' \end{cases},$$

где $a>0$, $\lambda \ge 0$ – некоторые константы;

(iii) $$f(x,x') = \begin{cases} a, & \text{если } x > x' \\ 0, & \text{если } x = x' \\ -a, & \text{если } x < x' \end{cases}, \tag{20}$$

где $a>0$ некоторая константа.

Отметим, что соотношение (19) с функцией сравнительной полезности (20) порождает так называемое отношение вероятностного доминирования (см., например, [27]) по правилу:
$(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}')$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}\{\tilde{x} > \tilde{x}'\} \ge \mathrm{P}\{\tilde{x} < \tilde{x}'\}$,
где $\tilde{x}$ и $\tilde{x}'$ – независимые случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, с функциями распределения $F_{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})}$ и $F_{(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}')}$, соответственно, $\mathrm{P}\{A\}$ – вероятность события A. В частности, если $\mathrm{P}\{\tilde{x} = \tilde{x}'\} = 0$, то
$(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) \succeq (\boldsymbol{x}';\boldsymbol{p}')$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}\{\tilde{x} > \tilde{x}'\} \ge 1/2$.

Заключение

В статье систематизировано несколько известных, а также получен ряд новых результатов, посвященных характеризациям отношений предпочтения на множестве простых вероятностных распределений, инвариантных относительно допустимых преобразований шкалы измерения. Характеризации даны в рамках нескольких наиболее распространенных версий теории полезности (порядковой теории полезности, теории косвенной полезности, ранговой теории полезности и других) для типов шкал, представляющих наибольший практический интерес (порядковой шкалы, шкалы интервалов, шкалы отношений и изоморфных им шкал). Полученные теоремы позволяют, в частности, дать аксиоматизации бинарных отношений, порождаемых ранговой теорией полезности (следствие 1), ранговой теорией взвешенной полезности в случае бинарных лотерей (следствие 2), квантильной теорией полезности (теорема 1, пункт (iii); следствие 3) и вероятностным доминированием (теорема 7, пункт (iii)).

На наш взгляд, результаты, приведенные в статье, могут служить дополнительным оправданием в пользу применения этих отношений для описания задач принятия решений на множестве случайных величин, измеряемых в соответствующих шкалах.

Литература

1. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. М., 1979.
2. *Харди Г.Г., Литлвуд Дж.И., Полиа Г.* Неравенства. Л., 1948.
3. *Aczél J., Daróczy Z.* Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1963. Vol. 10. P. 171–190.
4. *Aczél J., Gronau D., Schwaiger J.* Increasing solutions of the homogeneity equation and of similar equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1994. Vol. 182(2). P. 436–464.
5. *Bell D.E.* Disappointment in decision making under uncertainty // Operations Research. 1985. Vol. 33. P. 1–27.
6. *Chew S.H.* A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox // Econometrica. 1983. Vol. 51. P. 1065–1092.
7. *Daróczy Z., Páles Zs.* Generalized-homogeneous deviation means // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1986. Vol. 33. P. 53–65.
8. *Dekel E.* An axiomatic characterization of preferences under uncertainty // Journal of Economic Theory. 1986. Vol. 40. P. 304–318.
9. *Fishburn P.C.* Implicit mean value and certainty equivalence // Econometrica. 1986. Vol. 54(5). P. 1197–1205.

10. *Fishburn P.C.* Nontransitive measurable utility // Journal of Mathematical Psychology. 1982. Vol. 26. P. 31–67.
11. *Khanna A., Kulldorff M.* A generalization of the mutual fund theorem // Finance and Stochastics. 1999. Vol. 3. P. 167–185.
12. *Loomes G., Sugden R.* Disappointment and dynamic consistency in choice under uncertainty // The Review of Economic Studies. 1986. Vol. 53(2). P. 271–282.
13. *Loomes G., Sugden R.* Some implications of a more general form of regret theory // Journal of Economic Theory. 1987. Vol. 41. P. 270–287.
14. *Luce R.D., Krantz D.H., Suppes P., Tversky A.* Foundations of measurement. Vol. III: Representation, axiomatization, and invariance. San Diego, 1990.
15. *Luce R.D., Narens L.* Classification of concatenation measurement structures according to scale type // Journal of Mathematical Psychology. 1985. Vol. 29. P. 1–72.
16. *Manski C.F.* Ordinal utility models of decision making under uncertainty // Theory and Decision. 1988. Vol. 25. P. 79–104.
17. *Marley A.A.J., Luce R.D.* A simple axiomatization of binary rank-dependent utility of gains (losses) // Journal of Mathematical Psychology. 2002. Vol. 46. P. 40–55.
18. *Marley A.A.J., Luce R.D.* Ranked-weighted utility and qualitative convolution // Journal of Risk and Uncertainty. 2001. Vol. 23. P. 135–163.
19. *Ostasiewicz S., Ostasiewicz W.* Means and their applications // Annals of Operations Research. 2000. Vol. 97. P. 337–355.
20. *Ovchinnikov S.* Means on ordered sets // Mathematical Social Science. 1996. Vol. 32. P. 39–56.
21. *Quiggin J.* A theory of anticipated utility // Journal of Economic Behavior and Organization. 1982. Vol. 3(4). P. 324–343.
22. *Ozaki H.* Non-expected utility as a solution to some statistical inference problem. Mimeo, Keio university. 2003.
23. *Roberts F.S.* Measurement theory with applications to decisionmaking, utility, and the social sciences. London, 1979.
24. *Roberts F.S., Rosenbaum Z.* Scale type, meaningfulness, and the possible psychophysical laws // Mathematical Social Sciences. 1986. Vol. 12. P. 77–95.
25. *Rothblum U.G.* Multivariate constant risk posture // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10(3). P. 309–332.
26. *Schmeidler D.* Subjective probability and expected utility without additivity // Econometrica. 1989. Vol. 57. P. 571–587.
27. *Wrather C., Yu P.L.* Probability dominance in random outcomes // Journal of Optimization Theory and Applications. 1982. Vol. 36(3). P. 315–334.