ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ, ЗАМКНУТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Соколов М.В.

Рассматривается задача характеризации параметрических семейств функций, замкнутых относительно допустимых преобразований шкалы измерения. Показано, что проблема может быть сведена к решению определенного функционального уравнения. Используя результаты теории функциональных уравнений, найдены решения нескольких частных случаев данной задачи. В качестве примеров экономико-математического приложения полученных выводов приведены характеризации гомотетичных производственных функций, семейства производственных функций Кобба-Дугласа и аддитивно-сепарабельных функций полезности.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из характерных особенностей прикладных математических моделей (в частности, экономико-математических) состоит в том, что фигурирующие в них переменные имеют вполне определенные интерпретации. Наличие такой интерпретации обычно автоматически предполагает знание типа шкалы, по которой измеряется соответствующая переменная. Например, такие переменные как цена, выпуск, доход измеряются по шкале отношений, (календарное) время и кардинальная полезность – по шкале интервалов, ординальная полезность – в порядковой шкале и т. д. При этом выбор конкретных единиц измерения переменных (например, копеек, рублей, млн. рублей и т. п.), то есть выбор конкретной шкалы в рамках заданного типа шкалы, во многом субъективен и обычно обусловлен лишь соображениями удобства. В связи с этим естественно потребовать, чтобы как выполнение исходных предпосылок, так и выводы модели не зависели от этого выбора (в противном случае у исследователя появляется возможность манипулировать результатами анализа, изменяя размерность используемых переменных). В литературе по теории измерений (Орлов, 1979, глава 3; Luce, Krantz, Suppes, Tversky, 1990; Roberts, 1979) данное требование известно как требование «адекватности» (meaningfulness), неформальное определение которого может быть следующим (Roberts, 1979, с. 59): высказывание (в частности, предпосылку или вывод модели) относительно некоторых переменных называют «*адекватным*», если его справедливость не зависит от выбора допустимых преобразований шкал, в которых измеряются фигурирующие в нем переменные.

Одна из типичных предпосылок, используемых в моделях, состоит в том, что некоторая функция F является элементом определенного параметрического семейства функций Φ. Например:

- в макроэкономических моделях и моделях теории фирмы при спецификации вида производственной функции (функции издержек, функции спроса, функции потребления, функции общественного благосостояния и т. п.);
- в моделях, описывающих принятие рациональных решений, при спецификации вида функции полезности;
- в ряде параметрических методов математической статистики и эконометрики (например, регрессионном анализе при спецификации вида проверяемой регрессионной зависимости) и т. д.

В данной работе исследуются ограничения на возможный функциональный вид параметрического семейства Φ, накладываемые требованием «адекватности» высказывания

«функция F является элементом параметрического семейства Φ» (1)

для любой функции F. С математической точки зрения «адекватность» высказывания (1) означает замкнутость семейства Φ относительно некоторых преобразований – группы допустимых преобразований соответствующей шкалы измерения – интерпретируемых как переход к другим единицам измерения переменных; этим и обусловлено название статьи.

Актуальность поставленной задачи определяется, в частности, тем, что в некоторых теоретических моделях авторы не конкретизируют размерность используемых экономических переменных (например, труда, капитала). В этом случае предположение о том, что некоторая функция F (например, производственная функция) от этих переменных является элементом определенного параметрического семейства функций Φ некорректно, если только последнее не замкнуто относительно соответствующей группы допустимых преобразований.

Используя некоторые результаты теории функциональных уравнений, в работе приведены решения нескольких частных случаев задачи характеризации параметрических семейств функций, замкнутых относительно допустимых преобразований шкалы измерения, для типов шкал, представляющих наибольший практический интерес – номинальной шкалы, порядковой шкалы, шкалы интервалов, шкалы отношений и изоморфных им шкал. В качестве примеров экономико-математического приложения полученных результатов даны характеризации гомотетичных производственных функций, семейства производственных функций Кобба-Дугласа и аддитивно-сепарабельных функций полезности.

Рассматриваемая постановка задачи является вариацией подхода, предложенного в работе (Luce, 1959). Р.Д. Льюсом сформулирован принцип (principle of theory construction, PTC), обобщающий метод анализа размерностей на случай произвольных шкал измерения переменных. Согласно PTC, любой «закон», связывающий некоторые переменные $y, x_1,..., x_n$ посредством функциональной зависимости $y = F(x_1,..., x_n)$, должен обладать тем свойством, что всякое допустимое преобразование шкалы измерения независимой переменной x_i, $i=1,...,n$ должно приводить к допустимому преобразованию шкалы зависимой переменной y. Иными словами, изменение единиц измерения независимых переменных $x_1,...,x_n$ не должно менять функционального вида F «закона», вызывая лишь переход к другой единице измерения зависимой переменной y. Данное предположение существенно сужает возможный функциональный вид F «закона» (см., например, (Aczél, Roberts, Rosenbaum, 1986)). Очевидно, для групп допустимых преобразований шкалы зависимой переменной y, допускающих параметризацию множеством действительных чисел (что имеет место, например, для шкал отношений, интервалов, порядковой шкалы), РТС является частным случаем рассматриваемой постановки.

Ряд близких постановок задачи также рассмотрен в (Клейнер, 1986, §2.2.3) (применительно к производственным функциям) и (Орлов, 1979, §3.2, §3.3) (применительно к задачам математической статистики).

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже приняты следующие соглашения об обозначениях. Вектора и вектор-функции выделены жирным шрифтом (например, $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$). $\mathbf{0}$ – нулевой вектор размерности n. $x_{(i)}$ обозначает i-ый член вариационного ряда, составленного из компонентов вектора $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$. R и R_+ – множества всех действительных чисел и положительных действительных чисел, соответственно. Все операции над векторами и множествами выполняются поэлементно (например, $T(\boldsymbol{x})=\left(T(x_1),...,T(x_n)\right)$, где T – одноместная функция; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\left(T_1(x_1),...,T_n(x_n)\right)$, где $\boldsymbol{T}=(T_1,...,T_n)$ – одноместная вектор-функция).

Пусть $\mathbf{X}$ – непустое множество. Семейство $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ биекций множества $\mathbf{X}$ на себя называется *группой преобразований*, если оно образует группу относительно операции функциональной композиции $\circ$. Нейтральный элемент группы – тождественное преобразование – обозначим через $\boldsymbol{I}$: $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{X}$.

В случае когда $\mathbf{X}=\mathrm{X}$, где X – открытый интервал в R, примерами групп преобразований, имеющих наибольшее практическое значение, являются (см., например, (Luce, Krantz, Suppes, Tversky, 1990, глава 20)):

- группа преобразований, сопряженных с преобразованиями сдвига,

$$\mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X})=\left\{T: T(x)=f^{-1}\left(f(x)+b\right), b\in\mathrm{R},\ x\in\mathrm{X}\right\} \tag{2}$$

(где f – гомеоморфизм интервала X на R), описывающая *шкалу разностей* и изоморфные ей шкалы измерения (отношений, лог-отношений и другие);

- группа преобразований, сопряженных с аффинными преобразованиями,

$$\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}) = \left\{T : T(x) = f^{-1}\big(af(x)+b\big),\ a \in \mathrm{R}_+,\ b \in \mathrm{R},\ x \in \mathrm{X}\right\} \tag{3}$$

(где f – гомеоморфизм интервала X на R), описывающая *шкалу интервалов* и изоморфные ей шкалы измерения (лог-интервалов и другие);

- группа автоморфизмов интервала X

$$\mathrm{T}_O(\mathrm{X}) = \{T : T - \text{возрастающая биекция интервала X на себя}\}, \tag{4}$$

описывающая *порядковую* (*ординальную*) *шкалу* измерения;

- группа всех биекций интервала X на себя

$$\mathrm{T}_N(\mathrm{X}) = \{T : T - \text{биекция интервала X на себя}\}, \tag{5}$$

описывающая *номинальную шкалу* (*шкалу наименований*).

Непустое подмножество $\mathbf{Y}$ множества $\mathbf{X}$ называется *инвариантным* (*замкнутым*) *относительно группы преобразований* $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ (для краткости, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-*инвариантным*), если $\boldsymbol{y} \in \mathbf{Y}$ влечет $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) \in \mathbf{Y}$ для любого преобразования $\boldsymbol{T} \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$.

$\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантное подмножество множества $\mathbf{X}$ называется *минимальным* (Bartłomiejczyk, Drewniak, 2004), если оно не содержит собственного $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантного подмножества. Множество всех минимальных $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантных подмножеств множества $\mathbf{X}$ обозначим за $\mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$. Заметим, что $\mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$ в общем случае не является конечным или даже счетным множеством. Очевидно, $\mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$ образует разбиение множества $\mathbf{X}$. Пользуясь этим, определим отображение $J_{\mathbf{T}(\mathbf{X})} : \mathbf{X} \to \mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$, сопоставляющее элементу $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ минимальное $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантное подмножество $\mathbf{Y} \in \mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$, содержащее $\boldsymbol{x}$:

$$J_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Y} : \boldsymbol{x} \in \mathbf{Y},\ \mathbf{Y} \in \mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}. \tag{6}$$

Рассмотрим параметрическое семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P}) = \left\{F(\cdot\,,\boldsymbol{p}) : \mathbf{X} \to \mathrm{R},\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}\right\}$ функций $F(\cdot;\boldsymbol{p})$, где $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{R}^n$ – область определения всех функций семейства, $\mathbf{P} \subseteq \mathrm{R}^m$ – множество параметров. Не умаляя общности, будем считать, что элементы семейства $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ *различимы*, то есть

(i) $F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}')$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ влечет $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$.

Семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ назовем *вырожденным*, если все его элементы тождественно равны константам.

Семейство функций $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ называется *инвариантным* (*замкнутым*) *относительно группы преобразований* $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ (для краткости, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-*инвариантным*), если для любой функции $F:\mathbf{X}\to \mathrm{R}$

$F \in \Phi$ влечет $F\circ \boldsymbol{T} \in \Phi$ для любого преобразования $\boldsymbol{T}\in \mathbf{T}(\mathbf{X})$. (7)

Поскольку $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ – группа, то из (7) также следует, что для любой функции $F:\mathbf{X}\to \mathrm{R}$

$F \notin \Phi$ влечет $F\circ \boldsymbol{T} \notin \Phi$ для любого $\boldsymbol{T}\in \mathbf{T}(\mathbf{X})$.

Таким образом, с содержательной точки зрения $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантность семейства $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ означает «адекватность» высказывания (1) при любом преобразовании из группы $\mathbf{T}(\mathbf{X})$.

Интересующая нас задача состоит в том, чтобы для заданных множеств $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$ и группы преобразований $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ описать все $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантные параметрические семейства функций $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$. Используя результаты теории функциональных уравнений, ниже получены решения нескольких частных случаев данной задачи при наличии ряда дополнительных предположений.

2. ТРАНСЛЯЦИОННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Очевидно, если параметрическое семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно, то для каждого преобразования $\boldsymbol{T}\in \mathbf{T}(\mathbf{X})$ найдется такое отображение $\boldsymbol{g_T}:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$, зависящее от $\boldsymbol{T}$, что

$F(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x});\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p})),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{X},\ \boldsymbol{p}\in\mathbf{P}$. (8)

Предложение 1. О свойствах отображения $\boldsymbol{g_T}$.

Пусть $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ – $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантное параметрическое семейство функций. Тогда:

- при каждом фиксированном $\boldsymbol{T}\in \mathbf{T}(\mathbf{X})$ отображение $\boldsymbol{g_T}:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$, задаваемое равенством (8), корректно определено и биективно;
- семейство отображений

$\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P}) = \{\boldsymbol{g_T}, \boldsymbol{T}\in\mathbf{T}(\mathbf{X})\}$

образует группу преобразований множества $\mathbf{P}$;
- отображение $\boldsymbol{g_\bullet}:\mathbf{T}(\mathbf{X})\to\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P})$ является антигомоморфизмом групп $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P})$, то есть удовлетворяет условию

$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_1\circ\boldsymbol{T}_2}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_2}\circ\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_1}(\boldsymbol{p})$ для любых $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2\in\mathbf{T}(\mathbf{X})$ и $\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}$. (9)

Доказательство.

В силу условия (i) отображение $\boldsymbol{g_T}$ корректно определено. Итерируя (8), имеем
$F\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_1 \circ \boldsymbol{T}_2}(\boldsymbol{p})\right) = F\left(\boldsymbol{T}_1 \circ \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{p}\right) = F\left(\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_1}(\boldsymbol{p})\right) = F\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_2} \circ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_1}(\boldsymbol{p})\right),\ \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$,
откуда, в силу условия (i), следует (9). (9) влечет

$$\boldsymbol{g_I}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p},\ \forall \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}. \tag{10}$$

При любом $\boldsymbol{T} \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$ отображение $\boldsymbol{g_T}$ является биекцией множества $\mathbf{P}$ на $\mathbf{P}$. Действительно, из (9) и (10) следует, что

$$\boldsymbol{g_T} \circ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}^{-1}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}^{-1}} \circ \boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}. \tag{11}$$

Поскольку $\boldsymbol{g_T} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, то первое равенство в (11) влечет сюръективность, а второе – инъективность $\boldsymbol{g_T}$.

Очевидно, семейство биекций $\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P})$ образует группу относительно операции функциональной композиции с тождественным преобразованием (10) в качестве единицы. ■

Предложение 1 дает возможность использовать для получения характеризаций $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантных семейств функций результаты о решениях трансляционного функционального уравнения (9), достаточно хорошо изученного в литературе (см., например, обзорную статью (Moszner, 1995)).[1] Так один из результатов (Moszner, 1973) о частном решении уравнения (9) позволяет получить

Утверждение 1.

Пусть $\Phi(\mathbf{X}; \mathbf{P})$ – $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантное семейство функций. Если для любых $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \in \mathbf{P}$ существует единственное преобразование $\boldsymbol{T} \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$, такое, что $\boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$ (где $\boldsymbol{g_T}$ определено равенством (8)), то найдутся биекция $\boldsymbol{T}_\bullet$ множества $\mathbf{P}$ на группу $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ и функция $H : \mathbf{X} \to \mathrm{R}$, такие, что

$$F(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}) = H\left(\boldsymbol{T_p}(\boldsymbol{x})\right). \tag{12}$$

Доказательство.

Если для любых $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \in \mathbf{P}$ найдется хотя бы одно преобразование $\boldsymbol{T} \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$, такое, что

$$\boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}', \tag{13}$$

то общее решение функционального уравнения (9) имеет вид (Moszner, 1973)

$$\boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}^{-1}\left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) \circ \boldsymbol{T}\right),\ \boldsymbol{T} \in \mathbf{T}(\mathbf{X}),\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{P},$$

[1] В частности, общее решение функционального уравнения (9) построено в работе (Mach, Moszner, 2004, теорема 1, замечание 6).

где $\boldsymbol{h}$ – произвольная биекция множества параметров $\mathbf{P}$ на множество $\mathbf{T}(\mathbf{X})/\mathbf{T}'(\mathbf{X})$ правых классов смежности группы $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ по некоторой ее подгруппе $\mathbf{T}'(\mathbf{X})$. В силу предположения, преобразование $\boldsymbol{T}$, фигурирующее в (13), единственно. Следовательно, для любого $\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}$ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})$ является одноэлементным множеством. Это возможно только если подгруппа $\mathbf{T}'(\mathbf{X})$ тривиальна: $\mathbf{T}'(\mathbf{X})=\{\boldsymbol{I}\}$. Таким образом, $\boldsymbol{h}$ является биекцией множества $\mathbf{P}$ на множество $\mathbf{T}(\mathbf{X})/\{\boldsymbol{I}\}$. Поскольку $\mathbf{T}(\mathbf{X})/\{\boldsymbol{I}\}$ и $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ изоморфны, не умаляя общности, можно считать, что $\boldsymbol{h}$ является биекцией $\mathbf{P}$ на $\mathbf{T}(\mathbf{X})$.

Обозначим $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\in\mathbf{T}(\mathbf{X})$, $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{I})$, тогда

$$F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=F\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}})\right)=F\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h}^{-1}\left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{I}})\circ\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}}\right)\right)=F\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{I}})\right)=F\left(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x});\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{I}}\right),$$

что соответствует (12) с $H(\cdot)=F(\cdot;\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{I}})$. ■

Очевидно, задача характеризации $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантных семейств функций $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ весьма чувствительна к множеству параметров $\mathbf{P}$. В частности, при «достаточно большом» числе параметров требование инвариантности перестает быть слишком ограничительным. Например, если $\mathbf{X}=\mathbf{P}=\mathrm{R}_{+}^{n}$ и переменные измеряются по шкале отношений $\mathbf{T}(\mathbf{X})=\mathrm{T}_{D;\ln}(\mathrm{R}_{+})\times\ldots\times\mathrm{T}_{D;\ln}(\mathrm{R}_{+})$, то параметрическое семейство $\Phi(\mathrm{R}_{+}^{n};\mathrm{R}_{+}^{n})=\left\{F(\cdot;\boldsymbol{p}):F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=H(\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}_{+}^{n}\right\}$, где $H:\mathrm{R}_{+}^{n}\to\mathrm{R}$ – произвольная функция, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно. По существу, параметры $\boldsymbol{p}$ в данном семействе играют роль размерных постоянных при значениях переменных $\boldsymbol{x}$.

Для указания «размерности» множества параметров $\mathbf{P}$ введем понятие m-параметрического семейства функций. Для формализации этого термина мы дополнительно предположим, что рассматриваемое семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ удовлетворяет следующим условиям:

(ii) При каждом фиксированном $\boldsymbol{x}\in\mathbf{X}$ функция $F(\boldsymbol{x};\cdot):\mathbf{P}\to\mathrm{R}$ непрерывна.

(iii) $\mathbf{P}$ гомеоморфно R^{m}.

Семейство функций $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii), будем называть m-*параметрическим*. Семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ назовем 0-*параметрическим*, если $\mathbf{P}$ – одноэлементное множество.

Условие (iii) определяет смысл параметра m. Возможное оправдание условия (ii) может состоять в следующем. Зачастую параметры в семействах функций, используемых в экономико-математических моделях, представляют собой нечто большее, чем способ индексирования элементов семейства. Иногда они также обладают экономической интерпретацией (например, параметры семейства производственных функций Кобба-Дугласа интерпретируются как технологический коэффициент и частные коэффициенты эластичности по соответствующим переменным). При наличии такой интерпретации требование непрерывности по параметрам (ii) представляется вполне оправданным.

Замечание 1.

m-параметрическое семейство $\Phi(\mathbf{X};\mathbf{P})$ $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно с группой $\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P})$ (введенной в Предложении 1) тогда и только тогда, когда семейство $\Phi'(\mathbf{X};\mathbf{P}')=\Phi(\mathbf{X};\boldsymbol{h}(\mathbf{P}'))$, где $\boldsymbol{h}$ – произвольный гомеоморфизм множества $\mathbf{P}'$ на множество $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно с группой $\mathbf{G}'_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P}')=\left\{\boldsymbol{h}^{-1}\circ\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}\circ\boldsymbol{h}:\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}\in\mathbf{G}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\mathbf{P})\right\}$. Таком образом, решение задачи характеризации $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантных m-параметрических семейств функций для какого-нибудь множества $\mathbf{P}$ позволяет получить решение аналогичной задачи для любого множества параметров (гомеоморфного $\mathbf{P}$). Данный факт позволяет нам в дальнейшем, не умаляя общности, считать, что $\mathbf{P}=\mathrm{R}^m$.

Приведенное замечание позволяет обозначить задачу характеризации всех m-параметрических семейств функций $\Phi(\mathbf{X};\mathrm{R}^m)$, инвариантных относительно группы преобразований $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, через $(\mathbf{T}(\mathbf{X}),m)$.

В следующих разделах приведены решения нескольких частных случаев задачи $(\mathbf{T}(\mathbf{X}),m)$ (при наличии некоторых дополнительных условий регулярности) для малых значений m, $\mathbf{X}=\mathrm{X}^n$, где $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{R}$ – открытый интервал, и групп преобразований вида:

(a) $\mathbf{T}(\mathbf{X})=\mathrm{T}(\mathrm{X}^n)=\left\{\underbrace{T,\dots,T}_{n}:T\in\mathrm{T}(\mathrm{X})\right\}$ и

(b) $\mathbf{T}(\mathbf{X})=\mathrm{T}^n(\mathrm{X}^n)=\underbrace{\mathrm{T}(\mathrm{X})\times\ldots\times\mathrm{T}(\mathrm{X})}_{n}$,

где $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ – одна из групп вида (2)–(5). Случай (a) соответствует ситуации, когда рассматриваемые переменные измеряются по одной и той же шкале. Примером функции, аргументы которой измеряются в шкалах с группой преобразований вида (a), может служить функция полезности денежного потока, компоненты которого измеряются по одной и той же шкале (отношений). Случай (b) соответствует ситуации, когда рассматриваемые переменные измеряются в независимых шкалах одного типа. Производственная функция двух независимых аргументов – труда и капитала – представляет собой пример функции, аргументы которой измеряются в шкалах с группой преобразований вида (b) с $\mathrm{T}(\mathrm{X})=\mathrm{T}_{D;\ln}(\mathrm{R}_+)$.

3. ЗАДАЧА $\left(\mathbf{T}(\mathbf{X}),0\right)$

В случае 0-параметрического семейства функций обозначим $F(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x};p)$, где p – единственный элемент множества параметров. Тогда уравнение (8) примет вид

$$F(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))=F(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{T}\in\mathbf{T}(\mathbf{X}). \tag{14}$$

Соотношение (14) представляет собой частный случай РТС, соответствующий ситуации, когда зависимая переменная измеряется по абсолютной шкале (напомним, что шкала измерения называется абсолютной, если ее группа преобразований тривиальна).

Утверждение 2.

0-параметрическое семейство функций $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно тогда и только тогда, когда его единственный элемент имеет вид

$$F(\boldsymbol{x})=H\left(J_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}(\boldsymbol{x})\right), \tag{15}$$

где отображение $J_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$ определено в (6), $H:\mathrm{S}_{\mathbf{T}(\mathbf{X})}\to\mathrm{R}$ – произвольная функция множества.

Доказательство.

Из (14) следует, что функция F тождественно равна константе на каждом минимальном $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантном подмножестве множества $\mathbf{X}$, то есть справедливо (15). Обратно, функция (15) удовлетворяет уравнению (14). ■

Следствие 1.

(a) Пусть $n\geq 2$ (случай $n=1$ рассмотрен в пункте (b)). Единственный элемент $\mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантного 0-параметрического семейства функций имеет вид

$$F(\boldsymbol{x})=H\left(f(x_1)-f(x_n),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_n)\right),$$

где $H:\mathrm{R}^{n-1}\to\mathrm{R}$ – произвольная функция.

(b) $\mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство функций вырождено.

Следствие 2.

(a) Пусть $n\geq 2$ (случай $n=1$ рассмотрен в пункте (b)). Единственный элемент $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантного 0-параметрического семейства функций имеет вид

$$F(\boldsymbol{x})=\begin{cases} H\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_{(1)})}{f(x_{(n)})-f(x_{(1)})},\ldots,\dfrac{f(x_n)-f(x_{(1)})}{f(x_{(n)})-f(x_{(1)})}\right), & \text{если } x_{(1)}<x_{(n)} \\ c, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (16)$$

где функция $H:\{\boldsymbol{y}\in[0,1]^n : \exists i,j\in\{1,\ldots,n\}: y_i=0,\ y_j=1\}\to \mathrm{R}$ и константа c произвольны.

(b) $\mathrm{T}^n_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство функций вырождено.

Следствие 3 (см. также (Орлов, 1979, с. 112; Bartłomiejczyk, Drewniak, 2004)).

(a) Единственный элемент F $\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)$-инвариантного 0-параметрического семейства функций принимает не более $\left|\mathrm{S}_{\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)}\right|=\sum_{k=1}^{n} k!St(n,k)$ различных значений, где $St(n,k)$ – числа Стирлинга второго рода; $F(\boldsymbol{x})$ зависит только от рангов чисел x_i, $i=1,\ldots,n$ в векторе $\boldsymbol{x}$.

(b) $\mathrm{T}^n_O(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство функций вырождено.

Следствие 4 (см. также (Орлов, 1979, с. 109)).

(a) Единственный элемент $\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$-инвариантного 0-параметрического семейства функций принимает не более $\left|\mathrm{S}_{\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)}\right|=\sum_{k=1}^{n} St(n,k)=B(n)$ различных значений, где $B(n)$ – числа Белла.

(b) $\mathrm{T}^n_N(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство функций вырождено.

Следствие 5 (см. также Eichhorn, Gehrig, 1982).

$\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-, $\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)$- или $\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство непрерывных функций вырождено.

Доказательство.

Поскольку $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)\subset\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)\subset\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$, то достаточно доказать утверждение для группы преобразований $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$. Если $n=1$, то утверждение следует из пункта (b) Следствия 2. Если $n\geq 2$, то рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{y}\in[0,1]^n$, такой, что $\exists i,j\in\{1,\ldots,n\}: y_i=0,\ y_j=1$, и последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(k)}=f^{-1}(\boldsymbol{y}/k)$, $k=1,2,\ldots$ В силу представления (16) и непрерывности функций f и F, имеем

$$H(\boldsymbol{y})=H\left(\frac{f(x_1^{(k)})-f(x_{(1)}^{(k)})}{f(x_{(n)}^{(k)})-f(x_{(1)}^{(k)})},\ldots,\frac{f(x_n^{(k)})-f(x_{(1)}^{(k)})}{f(x_{(n)}^{(k)})-f(x_{(1)}^{(k)})}\right)=F(\boldsymbol{x}^{(k)})=\lim_{k\to\infty}F(\boldsymbol{x}^{(k)})=F\left(f^{-1}(\mathbf{0})\right)=c. \blacksquare$$

Пример 1. Приложение к характеризации «адекватных» высказываний.

Пусть $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ – множества. n-арное отношение $\mathbf{L}$ на $\mathbf{X}=\mathrm{X}_1\times\ldots\times\mathrm{X}_n$ назовем *высказыванием относительно* n *переменных*. Высказывание *нетривиально*, если $\mathbf{L}\neq\varnothing$ и $\mathbf{L}\neq\mathbf{X}$. Будем говорить, что высказывание *«адекватно» относительно группы преобразований* $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ (для краткости, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-*«адекватно»*), если множество $\mathbf{L}$ $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантно. Определенный интерес (см., например, Bartłomiejczyk and Drewniak (2004)) представляет описание всех нетривиальных «адекватных» высказываний (высказывания $\mathbf{L}=\varnothing$ и $\mathbf{L}=\mathbf{X}$ всегда «адекватны»). Очевидно, высказывание $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-«адекватно» тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\mathbf{L}$ есть единственный элемент $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-инвариантного 0-параметрического семейства функций. Таким образом, задача характеризации всех $\mathbf{T}(\mathbf{X})$-«адекватных» высказываний сводится к задаче $\left(\mathbf{T}(\mathbf{X}),0\right)$.

Приведем несколько примеров. Пусть $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{R}$ – открытый интервал. В силу Следствия 1 (пункт (a)), высказывание $\mathbf{L}$ относительно n ($n\geq 2$) переменных $\mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-«адекватно» тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\mathbf{L}$ имеет вид $\mathbf{1}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})=H\left(f(x_1)-f(x_n),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_n)\right)$, где $H:\mathrm{R}^{n-1}\to\{0,1\}$ – произвольная функция. Следовательно, $\mathbf{L}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{X}^n:\left(f(x_1)-f(x_n),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_n)\right)\in\mathrm{A}\right\}$, где $\mathrm{A}=H^{-1}(1)\subseteq\mathrm{R}^{n-1}$ – прообраз элемента 1. Так, все «адекватные» высказывания относительно 2-х переменных, измеряемых по одной и той же шкале отношений ($\mathbf{T}(\mathbf{X})=\mathrm{T}_{D;\ln}(\mathrm{R}_+^2)$), имеют вид «$x_1/x_2\in\mathrm{A}$» (для некоторого множества $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{R}_+$). В силу Следствия 1 (пункт (b)), не существует нетривиальных $\mathrm{T}_{D;f}^n(\mathrm{X}^n)$-«адекватных» высказываний относительно n переменных. В силу Следствия 2 (пункт (a)), «$x_1=x_2$», «$x_1\neq x_2$», «$x_1>x_2$», «$x_1<x_2$», «$x_1\geq x_2$» и «$x_1\leq x_2$» исчерпывают все нетривиальные «адекватные» высказывания относительно 2-х переменных, измеряемых по одной и той же порядковой шкале, шкале интервалов или изоморфной ей шкале (заметим, что характеризация всех $\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)$-«адекватных» высказываний относительно n переменных, где $\mathrm{X}\subset\mathrm{R}$ – замкнутый интервал, получена в работе (Bartłomiejczyk and Drewniak (2004)). «$x_1=x_2$» и «$x_1\neq x_2$» – единственные нетривиальные «адекватные» высказывания относительно 2-х переменных, измеряемых по одной и той же номинальной шкале.

4. ЗАДАЧА $(\mathbf{T}(\mathbf{X}),1)$

Утверждение 3.

(a) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R})$ $\mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно. Если существует вектор $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{X}^n$, такой, что функция $F(\boldsymbol{x}';\cdot)$ инъективна, а функция $b \mapsto F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}')+b\right); p\right)$, определенная на R, строго монотонна при каждом фиксированном $p \in \mathrm{R}$, то

$$F(\boldsymbol{x}; p) = H\left(h(p) + f(x_1),\ldots,h(p) + f(x_n)\right), \tag{17}$$

где h – гомеоморфизм R на себя, $H:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ – произвольная функция, такая, что $b \mapsto H(\boldsymbol{y}+b)$ непрерывна при каждом фиксированном $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$ и строго монотонна хотя бы при одном $\boldsymbol{y}$.

(b) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R})$ $\mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно. Если все элементы $F(\cdot\,; p)$ семейства Φ непрерывны и строго монотонны и существует вектор $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{X}^n$, такой, что функция $F(\boldsymbol{x}';\cdot)$ инъективна, то

$$F(\boldsymbol{x}; p) = H\left(h(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right), \tag{18}$$

где $H:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ – непрерывная строго монотонная функция, h – гомеоморфизм R на себя, λ_i, $i = 1,\ldots,n$ – ненулевые константы.

Доказательство.

(a) Обозначим $g_b = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, где отображение $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$ определено равенством (8), $\boldsymbol{T}(\cdot) = f^{-1}\left(f(\cdot)+b\right) \in \mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X}^n)$, $b \in \mathrm{R}$. Тогда функциональные уравнения (8), (9) примут вид

$$F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x})+b\right); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}; g_b(p)\right), \tag{19}$$

$$g_{b_1+b_2}(p) = g_{b_2} \circ g_{b_1}(p),\ b_1, b_2, p \in \mathrm{R}, \tag{20}$$

соответственно.

В силу инъективности и непрерывности (условие (ii)) функция $F(\boldsymbol{x}';\cdot)$ строго монотонна. Совместно с (19) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ это влечет непрерывность и, в силу биективности (см. Предложение 1), строгую монотонность $g_b(\cdot)$.

Поскольку функция $b \mapsto F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}')+b\right); p\right)$ строго монотонна, то из (19) с $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ и строгой монотонности $F(\boldsymbol{x}';\cdot)$ следует, что $b \mapsto g_b(p)$ строго монотонна при каждом фиксированном p. Решение трансляционного функционального уравнения (20) в этом случае имеет вид (Aczél, 1966, с. 248)

$$g_b(p) = h^{-1}\left(h(p) + b\right),\ p, b \in \mathrm{R}, \tag{21}$$

где h – произвольный гомеоморфизм R на себя.

Подставляя (21) в (19), имеем:

$$F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}) + b\right); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}; h^{-1}\left(h(p) + b\right)\right). \tag{22}$$

Для произвольного $p' \in \mathrm{R}$ положим в (22) $b = h(p')$, $p = h^{-1}(0)$, тогда

$F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}) + h(p')\right); h^{-1}(0)\right) = F(\boldsymbol{x}; p')$,

что соответствует (17) с $H(\cdot) = F\left(f^{-1}(\cdot); h^{-1}(0)\right)$.

(b) Обозначим $g_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, где $\boldsymbol{T}(\cdot) = f^{-1}\left(f(\cdot) + \boldsymbol{b}\right) \in \mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^n$. Тогда функциональные уравнения (8), (9) примут вид

$$F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\right); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}; g_{\boldsymbol{b}}(p)\right), \tag{23}$$

$$g_{\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2}(p) = g_{\boldsymbol{b}_2} \circ g_{\boldsymbol{b}_1}(p),\ \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathrm{R}^n,\ p \in \mathrm{R}, \tag{24}$$

соответственно.

Рассуждения, аналогичные приведенным в пункте (a), устанавливают непрерывность и строгую монотонность функций $F(\boldsymbol{x}'; \cdot)$ и $g_{\boldsymbol{b}}(\cdot)$ (при каждом фиксированном $\boldsymbol{b}$).

В силу сделанных предположений, при фиксированном p левая часть равенства (23) с $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ непрерывна и строго монотонна по $\boldsymbol{b}$. Следовательно, функция $\boldsymbol{b} \mapsto g_{\boldsymbol{b}}(p)$ также непрерывна и строго монотонна (при каждом фиксированном p).

Таким образом, функция $(b_1, ..., b_n, p) \mapsto g_{\boldsymbol{b}}(p)$ строго монотонна по всем переменным и непрерывна по ним. Следовательно, она непрерывна также по совокупности $n+1$ переменных. Решение функционального уравнения (24) при условии $g_{\boldsymbol{0}}(p) = p$ в этом случае имеет вид (Moszner, 1989, с. 274):

$$g_{\boldsymbol{b}}(p) = h^{-1}\left(h(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right),\ \boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^n,\ p \in \mathrm{R},$$

где h – произвольный гомеоморфизм R на себя, λ_i, $i = 1, ..., n$ – ненулевые константы.

Подставляя полученное выражение в (23), имеем:

$$F(\boldsymbol{x}; p) = F\left(f^{-1}\left(f(\boldsymbol{x}') + f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\right); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}'; g_{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')}(p)\right) =$$

$$= F\left(\boldsymbol{x}'; h^{-1}\left(h(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(f(x_i) - f(x_i')\right)\right)\right),$$

что соответствует (18) с $H(y) = F\left(\boldsymbol{x}'; h^{-1}\left(y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i')\right)\right)$. ■

Пример 2. Характеризация гомотетичных производственных функций.

Напомним, что (производственная) функция $H : \mathrm{R}_+^n \to \mathrm{R}_+$ называется *гомотетичной*, если найдется такой гомеоморфизм $u : H(\mathrm{R}_+^n) \to \mathrm{R}_+$, что функция $u \circ H$ линейно-однородна. Характеризация гомотетичных функций (Aczél, Moszner, 1994, теорема 6) и пункт (a) Утверждения 3 позволяют доказать следующий результат.

Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{R}_+^n;\mathrm{R})$ инвариантно относительно группы преобразований $\mathrm{T}_{D;\ln}(\mathrm{R}_+^n)$ (шкалы отношений). Предположим, что существует вектор $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{R}_+^n$, такой, что $F(\boldsymbol{x}_0;\mathrm{R}) = F(\mathrm{R}_+^n;\mathrm{R})$, функция $F(\boldsymbol{x}_0;\cdot)$ инъективна, а функция $a \mapsto F(a\boldsymbol{x}_0;p)$ строго монотонна на R_+ при каждом фиксированном $p \in \mathrm{R}$. Если

$F(\boldsymbol{x};p) = F(\boldsymbol{x}';p)$ влечет $F(\boldsymbol{x};p') = F(\boldsymbol{x}';p')$ для любого $p' \in \mathrm{R}$, (25)

то

$$F(\boldsymbol{x};p) = H\big(h(p)x_1,\dots,h(p)x_n\big),$$

где h – гомеоморфизм R на R_+, $H : \mathrm{R}_+^n \to \mathrm{R}$ – гомотетичная функция.

Интерпретация условия (25) состоит в том, что значения функций семейства Φ измеряются в изоморфных номинальных шкалах (Aczél, Moszner, 1994, замечание 3).

Пример 3. Характеризация производственных функций Кобба-Дугласа.

Частный случай пункта (b) Утверждения 3 приводит к следующей характеризации семейства производственных функций Кобба-Дугласа.

Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{R}_+^n;\mathrm{R})$ инвариантно относительно группы преобразований $\mathrm{T}_{D;\ln}^n(\mathrm{R}_+^n)$ (шкалы отношений). Если все элементы $F(\cdot;p)$ семейства Φ непрерывны и строго монотонно возрастают и существует вектор $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{R}_+^n$, такой, что функция $F(\boldsymbol{x}_0;\cdot)$ инъективна, то Φ образует семейство функций Кобба-Дугласа

$$F(\boldsymbol{x};p) = H\left(h(p)\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\right),$$

где $H : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция, h – гомеоморфизм R на R_+, λ_i, $i = 1,\dots,n$ – положительные константы, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. При этом параметр p в семействе Φ отвечает за технологический коэффициент.

Пример 4. Характеризация аддитивно-сепарабельных функций полезности.

Функцию (полезности) $U: \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n \to \mathrm{R}$ называют *аддитивно-сепарабельной*, если существуют функции $u: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $u_i: \mathrm{X}_i \to \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что справедливо представление

$$U(\boldsymbol{x}) = u\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)\right). \tag{26}$$

Незначительная модификация доказательства пункта (b) Утверждения 3 (см. также Замечание 2 ниже) и известный результат (Luce, Krantz, Suppes, Tversky, 1990, глава 20, теорема 5) о характеризации однородной группы возрастающих преобразований интервала действительных чисел позволяют доказать следующий результат. Пусть функция полезности $U: \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n \to \mathrm{R}$ является элементом $\mathrm{T}_1(\mathrm{X}_1) \times \ldots \times \mathrm{T}_n(\mathrm{X}_n)$-инвариантного 1-параметрического семейства функций $\Phi(\mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n; \mathrm{R})$, где $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, n$ – открытые интервалы, $\mathrm{T}_i(\mathrm{X}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ – группы возрастающих преобразований, такие, что для любых $x_i < x_i'$ из X_i найдется единственное $T_i \in \mathrm{T}_i(\mathrm{X}_i)$: $T_i(x_i) = x_i'$, $i = 1, \ldots, n$. Если все элементы семейства Φ непрерывны и строго монотонно возрастают по всем переменным и существует такое $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n$, что $F(\boldsymbol{x}_0; \cdot)$ инъективна, то найдутся возрастающие биекции $u_i: \mathrm{X}_i \to \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, n$ и строго монотонно возрастающая непрерывная функция $u: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, такая, что справедливо (26).

Утверждение 4.

(a) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n; \mathrm{R})$, $n \geq 2$ (случай $n = 1$ рассмотрен в пункте (b)) $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно. Если при каждом фиксированном $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}^n$ функция $F(\boldsymbol{x}; \cdot)$ инъективна, то элементы Φ имеют вид

$$F(\boldsymbol{x}; p) = \begin{cases} H\left(\dfrac{f(x_1) - f(x_{(1)})}{f(x_{(n)}) - f(x_{(1)})}, \ldots, \dfrac{f(x_n) - f(x_{(1)})}{f(x_{(n)}) - f(x_{(1)})}; p\right), & \text{если } x_{(1)} < x_{(n)}, \\ h(p), & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{27}$$

где функция $H: \{\boldsymbol{y} \in [0,1]^n : \exists i, j \in \{1, \ldots, n\} : y_i = 0,\ y_j = 1\} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ непрерывна и строго монотонна по последнему аргументу, функция $h: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ – непрерывна и строго монотонна.

(a)' Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n; \mathrm{R})$, $n \geq 2$ инвариантно относительно группы $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$. Предположим, что существует вектор $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{X}^n$, такой, что $F(\boldsymbol{x}_0; \cdot)$ инъективна, функции $a \mapsto F\left(f^{-1}(af(\boldsymbol{x}_0)); p\right)$, $b \mapsto F\left(f^{-1}(f(\boldsymbol{x}_0) + b); p\right)$, определенные на R_+ и R соответственно, строго монотонны или постоянны при каждом фиксированном $p \in \mathrm{R}$. Тогда элементы Φ имеют вид (27) или

$$F(\boldsymbol{x}; p) = H\big(h(p)\big(f(x_1) - f(x_n)\big),..., h(p)\big(f(x_{n-1}) - f(x_n)\big)\big), \tag{28}$$

где h – гомеоморфизм R на R_+, $H : \mathrm{R}^{n-1} \to \mathrm{R}$ – произвольная функция, такая, что $a \mapsto H(a\boldsymbol{y})$ непрерывна на R_+ при каждом фиксированном $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^{n-1}$ и строго монотонна хотя бы при одном $\boldsymbol{y}$.

(b) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R})$ $\mathrm{T}^n_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно. Если при каждом фиксированном $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}^n$ функция $F(\boldsymbol{x};\cdot)$ инъективна, то семейство Φ вырождено.

Доказательство.

(a) Обозначим $g_T = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, где $\boldsymbol{T} = (T,...,T)$, $T \in \mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X})$. Рассмотрим два преобразования $T(\cdot) = f^{-1}\big(af(\cdot)+b\big)$, $T'(\cdot) = f^{-1}\big(a'f(\cdot)+b'\big)$ из $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X})$, такие, что $T(x_0) = T'(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in \mathrm{X}$ (т. е. либо $a \neq a'$, либо $T = T'$). Обозначим $\boldsymbol{x}_0 = (x_0,...,x_0)$, тогда

$$F\big(\boldsymbol{x}_0; g_T(p)\big) = F\big(T(\boldsymbol{x}_0); p\big) = F\big(T'(\boldsymbol{x}_0); p\big) = F\big(\boldsymbol{x}_0; g_{T'}(p)\big).$$

Откуда, в силу инъективности $F(\boldsymbol{x};\cdot)$,

$$g_T(p) = g_{T'}(p),\ \forall p \in \mathrm{R}, \text{ если существует такая точка } x_0 \in \mathrm{X}, \text{ что } T(x_0) = T'(x_0). \tag{29}$$

Рассмотрим произвольное преобразование $T \in \mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X})$. Если у T имеется неподвижная точка, то, в силу (29), $g_T(p) = g_I(p) = p$. Если у T отсутствует неподвижная точка, то найдется преобразование $T' \in \mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X})$, имеющее неподвижную точку, такое, что $T(x_0) = T'(x_0)$ для некоторого $x_0 \in \mathrm{X}$. Тогда $g_T(p) = g_{T'}(p) = g_I(p) = p$. Таким образом,

$$F\big(T(\boldsymbol{x}); p\big) = F(\boldsymbol{x}; p) \text{ для любого } T \in \mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}). \tag{30}$$

При каждом фиксированном p решение уравнения (30) имеет вид (16).

(a)’ Обозначим $g_{a,b} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{T}(\cdot) = f^{-1}\big(af(\cdot)+b\big) \in \mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$, $a \in \mathrm{R}_+$, $b \in \mathrm{R}$. Тогда функциональные уравнения (8) и (9) примут вид

$$F\big(f^{-1}\big(af(\boldsymbol{x})+b\big); p\big) = F\big(\boldsymbol{x}; g_{a,b}(p)\big) \text{ и}$$

$$g_{a_1a_2,a_1b_2+b_1}(p) = g_{a_2,b_2} \circ g_{a_1,b_1}(p),\ a_1, a_2 \in \mathrm{R}_+,\ b_1, b_2, p \in \mathrm{R}, \tag{31}$$

соответственно.

Полагая в (31) $a_1 = 1$, $b_1 = b$, $a_2 = a$, $b_2 = 0$, имеем:

$$g_{a,b}(p) = g_{a,0} \circ g_{1,b}(p),\ a \in \mathrm{R}_+,\ b, p \in \mathrm{R},$$

при это функции $g_{a,0}$, $g_{1,b}$ удовлетворяют уравнениям

$$g_{a_1 a_2,0}(p) = g_{a_2,0} \circ g_{a_1,0}(p),\ a_1, a_2 \in \mathrm{R}_+,\ p \in \mathrm{R}, \tag{32}$$

$$g_{1,b_2+b_1}(p) = g_{1,b_2} \circ g_{1,b_1}(p),\ b_1, b_2, p \in \mathrm{R}. \tag{33}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в пункте (a) Утверждения 3, устанавливают, что функции $(a, p) \mapsto g_{a,0}(p)$, $(b, p) \mapsto g_{1,b}(p)$ постоянны или строго монотонны по первому аргументу и непрерывны и строго монотонны второму. Общие решения функциональных уравнений (32), (33) в этом случае имеют вид (Aczél, 1966, с. 248):

$$g_{a,0}(p) = p \text{ или } g_{a,0}(p) = h^{-1}(h(p)a), \tag{34}$$

$$g_{1,b}(p) = p \text{ или } g_{1,b}(p) = v^{-1}(v(p) + b), \tag{35}$$

где $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+$, $v : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ – произвольные гомеоморфизмы.

Рассмотрим каждую из комбинаций решений (34), (35) подробнее:

1. $g_{a,0}(p) = p$, $g_{1,b}(p) = p$. В этом случае $g_{a,b}(p) = g_{a,0} \circ g_{1,b}(p) = p$ и каждый элемент семейства Φ представляет собой $\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантное 0-параметрическое семейство функций, что приводит к решению вида (27).

2. $g_{a,0}(p) = p$, $g_{1,b}(p) = v^{-1}(v(p) + b)$. В этом случае $g_{a,b}(p) = v^{-1}(v(p) + b)$. Подставляя данное выражение в (31), приходим к противоречию:

$a_1 b_2 + b_1 = b_2 + b_1$ для любых $a_1 \in \mathrm{R}_+$, $b_1, b_2 \in \mathrm{R}$.

3. $g_{a,0}(p) = h^{-1}(h(p)a)$, $g_{1,b}(p) = p$. В этом случае $g_{a,b}(p) = h^{-1}(h(p)a)$ и

$$F\left(f^{-1}(af(\boldsymbol{x}) + b); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}; h^{-1}(h(p)a)\right). \tag{36}$$

Для произвольных $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}^n$ и $p' \in \mathrm{R}$ положим в (36) $p = h^{-1}(1)$, $a = h(p')$, $b = -h(p') f(x_n)$:

$$F\left(f^{-1}\left(h(p')\left(f(\boldsymbol{x}) - f(x_n)\right)\right); h^{-1}(1)\right) = F(\boldsymbol{x}; p'),$$

что соответствует (28) с $H(\cdot) = F\left(f^{-1}(\cdot), f^{-1}(0); h^{-1}(1)\right)$.

4. $g_{a,0}(p) = h^{-1}(h(p)a)$, $g_{1,b}(p) = v^{-1}(v(p) + b)$. Подставляя $g_{a,b}(p) = g_{a,0} \circ g_{1,b}(p) = h^{-1}\left(h \circ v^{-1}[v(p) + b]a\right)$ в (31), получим

$$h^{-1}\left(h \circ v^{-1}[v(p) + a_1 b_2 + b_1]a_1 a_2\right) = h^{-1}\left(h \circ v^{-1}\left[v \circ h^{-1}\left(h \circ v^{-1}[v(p) + b_1]a_1\right) + b_2\right]a_2\right).$$

Обозначим $w = h \circ v^{-1} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+$ и положим $b_1 = -v(p)$, тогда

$$w(a_1 b_2) a_1 = w\left(w^{-1}[w(0) a_1] + b_2\right).$$

Произведем замену $u(\cdot) = w(\cdot)/w(0) : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+$:

$$u(a_1 b_2)a_1 = u\left[u^{-1}(a_1) + b_2\right].$$

Обозначим $a = u(a_1 b_2)$, тогда

$$u^{-1}(a_1 a) = u^{-1}(a_1) + u^{-1}(a)/a_1,\ a_1, a \in \mathrm{R}_+. \tag{37}$$

В силу симметричности левой части уравнения (37) относительно a_1 и a, имеем

$$u^{-1}(a_1) + u^{-1}(a)/a_1 = u^{-1}(a_1 a) = u^{-1}(a a_1) = u^{-1}(a) + u^{-1}(a_1)/a,$$

откуда

$$u^{-1}(a_1)(1 - 1/a) = u^{-1}(a)(1 - 1/a_1).$$

Таким образом, с учетом равенства $u(0) = 1$, $u^{-1}(a) = 1 - 1/a$. Однако, данная функция не является гомеоморфизмом R_+ на R. Противоречие.

(b) Рассмотрим произвольное преобразование $\boldsymbol{T}(\cdot) = f^{-1}\left(\boldsymbol{a}f(\cdot) + \boldsymbol{b}\right)$ из $\mathrm{T}^n_{I;f}(\mathrm{X}^n)$, имеющее неподвижную точку (то есть либо $T_i = I$, либо $a_i \neq 1$, $i = 1,\dots,n$). Обозначив эту точку за $\boldsymbol{x}_0$, получим

$$F(\boldsymbol{x}_0; p) = F\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_0); p\right) = F\left(\boldsymbol{x}_0; g_{\boldsymbol{T}}(p)\right). \tag{38}$$

Поскольку $F(\boldsymbol{x};\cdot)$ инъективна, (38) влечет $g_{\boldsymbol{T}}(p) = p$, $\forall p \in \mathrm{R}$. Таким образом, $g_{\boldsymbol{T}}(p) = p$, если $\boldsymbol{T}$ имеет неподвижную точку.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{X}^n$ найдется преобразование $\boldsymbol{T}' \in \mathrm{T}^n_{I;f}(\mathrm{X}^n)$, имеющее неподвижную точку, и такое, что $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}') = f^{-1}(\boldsymbol{0})$. Поэтому

$$F(\boldsymbol{x}'; p) = F\left(\boldsymbol{x}'; g_{\boldsymbol{T}'}(p)\right) = F\left(\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}'); p\right) = F\left(f^{-1}(\boldsymbol{0}); p\right). \blacksquare$$

Утверждение 5.

(a) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R})$ инвариантно относительно группы $\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)$ (соответственно, $\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$). Если при каждом фиксированном $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}^n$ функция $F(\boldsymbol{x};\cdot)$ инъективна, то элементы Φ имеют вид

$F(\boldsymbol{x}; p) = H\left(J_{\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)}(\boldsymbol{x}); p\right)$ (соответственно, $F(\boldsymbol{x}; p) = H\left(J_{\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)}(\boldsymbol{x}); p\right)$),

где $H : \mathrm{S}_{\mathrm{T}_O(\mathrm{X}^n)} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ (соответственно, $H : \mathrm{S}_{\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$) – произвольная функция, непрерывная и строго монотонная по последнему аргументу.

(b) Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R})$ инвариантно относительно группы $\mathrm{T}^n_O(\mathrm{X}^n)$ (соответственно, $\mathrm{T}^n_N(\mathrm{X}^n)$). Если при каждом фиксированном $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}^n$ функция $F(\boldsymbol{x};\cdot)$ инъективна, то семейство Φ вырождено.

Доказательство.

(a) Доказательство аналогично доказательству пункта (a) Утверждения 4.

(b) Следует из пункта (b) Утверждения 4. ■

Замечание 2. Частично зависимые шкалы.

Отметим, что полученные в данном разделе решения, соответствующие случаям (a) полностью зависимых $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathrm{T}(\mathrm{X}^n)$ и (b) полностью независимых $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathrm{T}^n(\mathrm{X}^n)$ шкал измерения, могут быть обобщены на случай частично зависимых шкал с группой преобразований вида $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{X}_1^{n_1}) \times \ldots \times \mathrm{T}_k(\mathrm{X}_k^{n_k})$, где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Так, незначительная модификация доказательства Утверждения 3 позволяет получить следующий результат, касающийся случая частично зависимых шкал с группой преобразований вида (2).

Пусть 1-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}_1^{n_1} \times \ldots \times \mathrm{X}_k^{n_k}; \mathrm{R})$ инвариантно относительно группы преобразований $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathrm{T}_{D;f_1}(\mathrm{X}_1^{n_1}) \times \ldots \times \mathrm{T}_{D;f_k}(\mathrm{X}_k^{n_k})$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Если все элементы $F(\cdot; p)$ семейства Φ непрерывны и строго монотонно возрастают по всем аргументам, а функция $F(\boldsymbol{x};\cdot)$ инъективна при каждом фиксированном $\boldsymbol{x}$, то

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{x}; p) = F(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)}; p) = \\
&= H\Big(f_1(x_2^{(1)}) - f_1(x_1^{(1)}),\ldots, f_1(x_{n_1}^{(1)}) - f_1(x_1^{(1)}),\ldots, f_k(x_2^{(k)}) - f_k(x_1^{(k)}),\ldots, f_k(x_{n_k}^{(k)}) - f_k(x_1^{(k)}); \\
&h(p) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x_1^{(i)})\Big),
\end{aligned} \qquad (39)
$$

где h – гомеоморфизм R на себя, λ_i, $i = 1,\ldots,k$ – положительные константы, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $H : \mathrm{R}^{n-k+1} \to \mathrm{R}$ – произвольная непрерывная функция, строго монотонно возрастающая по первым $n-k$ аргументам и строго монотонная по последнему аргументу, такая, что функция, определенная равенством (39), строго монотонно возрастает по $x_1^{(i)}$, $i = 1,\ldots,k$.

5. НЕСКОЛЬКО КОММЕНТАРИЕВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАЧИ $(\mathbf{T}(\mathbf{X}), m)$ ПРИ $m \geq 2$

При наличии определенных условий регулярности общее решение трансляционного функционального уравнения (9) для задач $(\mathrm{T}_{D;f}(\mathrm{X}^n), m)$ и $(\mathrm{T}_{D;f}^n(\mathrm{X}^n), m)$ получено в работах (Aczél, 1966, §8.2.2; Aczel, Berg, Moszner, 1991). Приведем пример использования данных результатов для решения задачи $(\mathrm{T}_{D;f}^n(\mathrm{X}^n), m)$ при $m = n$.

Утверждение 6.

Пусть n-параметрическое семейство функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R}^n)$ $\mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно. Если для любых $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\in\mathrm{R}^n$ существует единственное преобразование $\boldsymbol{T}\in\mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$, такое, что $\boldsymbol{g_T}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}'$ (где $\boldsymbol{g_T}$ определено равенством (8)), то найдутся функция $H:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ и биекция $\boldsymbol{h}:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$, такие, что

$$F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=H\big(f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\big). \tag{40}$$

Доказательство.

Обозначим $\boldsymbol{g_b}=\boldsymbol{g_T}$, где $\boldsymbol{T}(\cdot)=f^{-1}\big(f(\cdot)+\boldsymbol{b}\big)\in\mathrm{T}^n_{D;f}(\mathrm{X}^n)$, $\boldsymbol{b}\in\mathrm{R}^n$. Тогда функциональные уравнения (8), (9) примут вид

$$F\Big(f^{-1}\big(f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}\big);\boldsymbol{p}\Big)=F\big(\boldsymbol{x};\boldsymbol{g_b}(\boldsymbol{p})\big) \text{ и}$$

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{b}_2}\circ\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{b}_1}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^n, \tag{41}$$

соответственно.

В силу сделанного предположения для любых $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\in\mathrm{R}^n$ уравнение $\boldsymbol{g_b}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}'$ имеет единственное решение $\boldsymbol{b}\in\mathrm{R}^n$. Общее решение функционального уравнения (41) в этом случае имеет вид (Aczél, 1966, с. 367)

$$\boldsymbol{g_b}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{h}^{-1}\big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{b}\big),\ \boldsymbol{p},\boldsymbol{b}\in\mathrm{R}^n,$$

где $\boldsymbol{h}$ – произвольная биекция R^n на себя. Обозначим $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{0})$, тогда

$$F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})=F\Big(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h}^{-1}\big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}_0)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\big)\Big)=F\Big(f^{-1}\big(f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\big);\boldsymbol{p}_0\Big),$$

что соответствует (40) с $H(\cdot)=F\Big(f^{-1}(\cdot);\boldsymbol{p}_0\Big)$. ■

Следующий результат показывает, что $\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$- и $\mathrm{T}^n_N(\mathrm{X}^n)$-инвариантных семейств строго монотонных функций не существует.

Утверждение 7.

(a) Пусть один из элементов $F(\cdot;\boldsymbol{p}_0)$ m-параметрического семейства функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R}^m)$ строго монотонно возрастает (или убывает) по всем переменным. Тогда Φ не инвариантно относительно группы $\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$.

(b) Пусть один из элементов $F(\cdot;\boldsymbol{p}_0)$ m-параметрического семейства функций $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{R}^m)$ инъективен по одной из переменных. Тогда Φ не инвариантно относительно группы $\mathrm{T}_N^n(\mathrm{X}^n)$.

Доказательство.

(a) Обозначим $\boldsymbol{g}_T=\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, где $\boldsymbol{T}=(T,...,T)\in\mathrm{T}_N(\mathrm{X}^n)$. Рассмотрим два произвольных преобразования $T,T'\in\mathrm{T}_N(\mathrm{X})$, $T\neq T'$. Пусть точка $x_0\in\mathrm{X}$ такова, что $T(x_0)\neq T'(x_0)$. Обозначим $\boldsymbol{x}_0=(x_0,...,x_0)$, тогда

$$F(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{g}_T(\boldsymbol{p}_0))=F(T(\boldsymbol{x}_0);\boldsymbol{p}_0)\neq F(T'(\boldsymbol{x}_0);\boldsymbol{p}_0)=F(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{g}_{T'}(\boldsymbol{p}_0)).$$

Таким образом, при фиксированном $\boldsymbol{p}_0$ отображение $\boldsymbol{g}_{\bullet}(\boldsymbol{p}_0):\mathrm{T}_N(\mathrm{X})\to\mathrm{R}^m$ инъективно. Однако, мощность множества $\mathrm{T}_N(\mathrm{X})$ биекций интервала X на себя превосходит мощность континуального множества R^m. Полученное противоречие доказывает Утверждение 7.

(b) Идея доказательства аналогична используемой в пункте (a). ■

6. ОБСУЖДЕНИЕ

На наш взгляд, приведенные результаты могут служить дополнительным аргументом в пользу применения характеризованных семейств функций при построении экономико-математических моделей, использующих переменные, измеряемые в соответствующих шкалах.

С другой стороны нижеследующие примеры показывают ограниченность полученных результатов. Источником примеров служит следующее наблюдение. Пусть X и P – эквивалентные подмножества R, $h:\mathrm{X}\to\mathrm{P}$ – биекция. Семейство $\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{P}^m)$ $\mathrm{T}(\mathrm{X}^n)$-инвариантно с отображением $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}$, определенным равенством $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{p})=h\circ T^{-1}\circ h^{-1}(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{T}=(T,...,T)\in\mathrm{T}(\mathrm{X}^n)$, тогда и только тогда, когда для любого $F\in\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{P}^m)$ функция $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\mapsto F(\boldsymbol{x};h(\boldsymbol{y}))$ постоянна на каждом минимальном $\mathrm{T}(\mathrm{X}^{n+m})$-инвариантном подмножестве множества X^{n+m}. Действительно, согласно (8), для любого $F\in\Phi(\mathrm{X}^n;\mathrm{P}^m)$ и $\boldsymbol{T}=(T,...,T)\in\mathrm{T}(\mathrm{X}^n)$

$$F(\boldsymbol{x};h(\boldsymbol{y}))=F(T^{-1}\circ T(\boldsymbol{x});h(\boldsymbol{y}))=F(T(\boldsymbol{x});\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{T}^{-1}}\circ h(\boldsymbol{y}))=F(T(\boldsymbol{x});h\circ T(\boldsymbol{y})),\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\in\mathrm{X}^{n+m}.$$

Так, параметрическое семейство $\Phi(\mathrm{X};\mathrm{P})$, образуемое функциями

$F(x;p)=\begin{cases}c_1,\ h(x)=p\\ c_2,\ h(x)\neq p\end{cases}$, где h – биекция X на P, $c_1\neq c_2$ – константы,

$\mathrm{T}_N(\mathrm{X})$ -инвариантно. Параметрическое семейство $\Phi(\mathrm{R};\mathrm{R})$, образуемое функциями

$$F(x;p)=\begin{cases} c_1,\ x<p \\ c_2,\ x=p \\ c_3,\ x>p \end{cases},$$ где c_1, c_2, c_3 – константы, хотя бы две из которых различны,

$\mathrm{T}_O(\mathrm{R})$-инвариантно. Параметрическое семейство $\Phi(\mathrm{X}^2;\mathrm{P})$, где X – открытый интервал в R, образуемое функциями

$$F(x_1,x_2;p)=\begin{cases} \dfrac{h(p)-f(x_{(1)})}{f(x_{(2)})-f(x_{(1)})}, & \text{если } x_{(1)}<x_{(2)} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$ где h, f – гомеоморфизмы X на R,

$\mathrm{T}_{I;f}(\mathrm{X}^2)$ -инвариантно. Эти семейства не были описаны ни в одном из приведенных выше результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя результаты теории функциональных уравнений, в работе приведены решения нескольких частных случаев задачи характеризации параметрических семейств функций, замкнутых относительно допустимых преобразований шкалы измерения. В качестве примеров экономико-математического приложения полученных результатов даны характеризации гомотетичных производственных функций (Пример 2), производственных функций Кобба-Дугласа (Пример 3) и аддитивно-сепарабельных функций полезности (Пример 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика.

Орлов А.И. (1979): Устойчивость в социально-экономических моделях. М.: Наука.

Aczél J. (1966): Lectures on functional equations and their applications. New York: Academic Press.

Aczél J., Berg L., Moszner Z. (1991): Sur l'equation de translation multidimensionnelle // *Results in Mathematics*. Vol. 19.

Aczél J., Moszner Z. (1994): New results on “scale” and “size” arguments justifying invariance properties of empirical indices and laws // *Mathematical Social Science*. Vol. 28.

Aczél J., Roberts F.S., Rosenbaum Z. (1986): On scientific laws without dimensional constants // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 119.

Bartłomiejczyk L., Drewniak J. (2004): A characterization of sets and operations invariant under bijections // *Aequationes Mathematicae*. Vol. 68. №1.

Eichhorn W., Gehrig W. (1982): Measurement of inequality in economics. In Optimization and Operations Research (Korte B. ed.). Amsterdam: North Holland.

Luce R.D. (1959): On the possible psychophysical laws // *Psychological Review*. Vol. 66. №2.

Luce R.D., Krantz D.H., Suppes P., Tversky A. (1990): Foundations of measurement. Vol. III: Representation, axiomatization, and invariance. San Diego: Academic Press.

Mach A., Moszner Z. (2004): Translation equations on monoids // *Annales Polonici Mathematici*. Vol. 84. №2.

Moszner Z. (1973): The translation equation and its application // *Demonstratio Mathematica*. Vol. 6. №1.

Moszner Z. (1989): Une généralisation d'un résultat de J. Aczél et M. Hosszú sur l'équation de translation // *Aequationes Mathematicae*. Vol. 37.

Moszner Z. (1995): General theory of the translation equation // *Aequationes Mathematicae*. Vol. 50.

Roberts F.S. (1979): Measurement theory, with applications to decisionmaking, utility, and the social sciences. London: Addison-Wesley.